

ANTON BEZÁK

NIEKOĽKO POZNÁMOK K MATEMATICKÉMU MODELOVANIU
V EKONOMICKEJ GEOGRAFII

Anton Bezák: Some comments on mathematical modelling in human geography. Geografický časopis 27, 1975, 1; 21 ref.

The purpose of this paper is to discuss, in a very short form, some methodological questions of the nature, building, functions, and application of mathematical models in human geography.

Táto krátka štúdia má slúžiť ako stručný úvod do problematiky matematického modelovania, ktoré sa v posledných dvoch desaťročiach stalo jednou zo základných analytických metód geografického výskumu. Vymedzený rozsah štúdie nám nedovoľuje podať úplný a vyčerpávajúci obraz uvedenej problematiky. Obmedzíme sa iba na niekoľko stručných poznámok o povahe, konštrukcii, funkciách a sfére aplikácie matematických modelov v úsilí zamyslieť sa nad ich metodologickým významom v súčasnej ekonomickej geografii. Pre úplnosť poznamenávame, že podrobnejšie rozpracovanie problému môže čitateľ nájsť v prácach [6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21].

*

Na otázku, čo je model a aké sú jeho funkcie v empirických vedách, by sme sa od metodológie i filozofie vedy sotva dočkali presnej a jednoznačnej odpovede. Teória modelov a modelovania [1] totiž ešte stále nepatrí medzi dobre rozpracované a vnútorne koherentné teoretické systémy s presne vymedzenou pojmovou sústavou a s jednotnou terminológiou. Aj keď na základné otázky modelovania existuje široké spektrum názorov, v niečom sa špecialisti z teórie modelov predsa zhodujú, a to predovšetkým v tom, že každé modelovanie je spojené s určitým zobrazením, pri ktorom sa jednej entite zvanej originál priraduje druhá entita zvaná model, zobrazujúca v generalizovanej podobe len tie aspekty originálu, ktoré sú s prihliadnutím na vopred stanovený cieľ podstatné, dôležité alebo prasto zaujímavé. Model teda nie je presnou kópiou originálu, ale iba jeho idealizovanou reprodukciou, ktorá je jednoduchšia, zrozumiteľnejšia a prístupnejšia a s ktorou sa ľahšie, bezpečnejšie a efektívnejšie narába. Vďaka tomu vzniká možnosť študovať originál nepriamo, prostredníctvom štúdia jeho modelu, pričom výsledky získané na tejto úrovni možno znovu pretransformovať do roviny originálu. Na prednosti tohto spôsobu vedeckého bádania poukážeme v ďalších úvahách.

Uvedené chápanie modelu ako ľubovoľnej entity, ktorá daný originál imituje a ktorá je v procese skúmania jeho reprezentantom, zahŕňa špeciálny prípad, kedy funkciu modelu zastáva matematická formula alebo systém takýchto formul. Modely tohto druhu nazývame matematickými modelmi. Každý matematický model pozostáva z elementov trojakého druhu, a to a) nezávisle a závisle od premenných, ktoré reprezentujú podstatné, dôležité alebo zaujímavé aspekty originálu; b) relácie, ktoré charakterizujú vzťahy medzi premennými a c) parametrov, ktoré ukazujú mieru týchto vzťahov.

Matematické modely môžeme klasifikovať z rôznych hľadísk. Podľa toho, či závislosť medzi premennými modelu ponímame ako závislosť pevnú, prísne determinovanú alebo ako voľnú, pri ktorej explicitne vystupuje prvok náhody, rozlišujeme modely deterministické a stochastické. S prihliadnutím na to, či čas vstupuje do štruktúry modelu implicitne alebo explicitne, rozlišujeme statické modely, modelujúce stav originálu k určitému časovému okamihu alebo intervalu a dynamické modely, postihujúce priamo proces jeho zmeny. V spoločenských vedách často rozlišujeme modely deskriptívne a normatívne. V prvom prípade je model púhou deskripciou originálu reprodukovajúcou jeho skutočný stav, v druhom prípade je normou pre originál a reprodukuje jeho potenciálny stav, aký môže nastať za určitých podmienok.

Matematické modely majú v porovnaní s modelmi iného druhu niekoľko predností. Prvá z nich, presná a stručná formulácia vedeckých tvrdení, súvisí s presnosťou a stručnosťou matematického jazyka. Druhá prednosť matematických modelov sa opiera o presné a stručné spôsoby matematickej dedukcie, a preto usudzovanie na báze matematického modelu je rýchle a odvodené dôsledky sú vždy správne, ak boli správne predpoklady, na základe ktorých sa model sformuloval. Do tretice matematický jazyk je vo svojej podstate univerzálnym jazykom, preto tým istým matematickým modelom môžeme často opísať niekoľko javov z rôznych myšlienkových oblastí.

*

Vyzbrojení všeobecnými poznatkami z predchádzajúceho odseku môžeme sa teraz podrobnejšie pozrieť na proces konštrukcie matematického modelu.

Počiatočná fáza tohto procesu, nazývaná formuláciou modelu a spočívajúca vo výbere premenných a analytickej formy závislosti medzi nimi, nadobúda v ekonomickej geografii niekoľko podôb. Pri prvej z nich formulujeme model na základe empiricky získaných poznatkov ako formálne vyjadrenie nejakej empirickej generalizácie. Dobrým príkladom sú dva modely vnútromestskej hustoty zaľudnenia [16] v tvare

$$P_x = P_0 e^{-bx}, \quad (1a)$$

$$b_t = b_0 e^{-ct}. \quad (1b)$$

Prvý model vyjadruje exponenciálny pokles hustoty zaľudnenia P_x s rastúcou vzdialenosťou x od stredu mesta, pričom P_0 je hustota v strede mesta a b gradient hustoty. Druhý opisuje exponenciálny pokles gradientu hustoty b_t v čase t ; b_0 je počiatočný gradient hustoty, c je parameter modelu a e v oboch prípadoch základ prirodzených logaritmov.

Druhý spôsob formulácie reprezentuje model ekonomickej bázy mesta, bu-

dovaný na teoretických poznatkoch, v tomto prípade na poznatkoch teórie ekonomickej bázy [2, pp. 98—99]. Model v tvare

$$Y = (1 - a)^{-1} X \quad (2)$$

vyjadruje závislosť celkovej zamestnanosti Y v meste na zamestnanosti v mestoformujúcom sektore X v podobe lineárnej rovnice s parametrom a , o ktorom sa v teórii predpokladá, že je konštantný a rovný podielu zamestnanosti v mestoobsluhujúcom sektore a celkovej zamestnanosti v meste.

Nakoniec tretí spôsob formulácie modelu sa opiera o analógiu, ktorá dovoľuje prenos poznatkov z jednej vednej oblasti do druhej. Svedčí o tom aj známy gravitačný model interakcie [17, pp. 44—70]: pri jeho pôvodnom odvodení sa postulovala analógia medzi priestorovou interakciou v ekonomickej geografii a priestorovou interakciou v klasickej mechanike. Veľkosť interakcie T_{ij} medzi sídlami i a j s počtom obyvateľov P_i a P_j , oddelených vzdialenosťou d_{ij} vyjadřila sa potom formulou Newtonovho zákona všeobecnej gravitácie.

$$T_{ij} = k P_i P_j d_{ij}^{-2}, \quad (3)$$

kde k je parameter modelu.¹

Formuláciou sa proces konštrukcie matematického modelu ani zďaleka nekončí. Spoľahlivé fungovanie modelu predpokladá ešte ďalšiu fázu, a to fázu kalibrácie, ktorá pozostáva z empirickej interpretácie premenných a estimácie parametrov modelu. Cieľom prvej operácie je udelenie empirického významu a presné definovanie premenných, pretože pri formulovaní modelu sa uvažujú vo veľmi všeobecnej rovine, prípadne sa vzťahujú na nepozorovateľné teoretické predmety, vlastností alebo vzťahy. Napríklad v gravitačnom modeli (3) samotná interakcia T_{ij} predstavuje teoretický termín, ktorý v závislosti od študovaného problému môžeme empiricky interpretovať ako množstvo cestujúcich, tovarov, migrantov a pod., premiestnených medzi sídlami i a j . Estimácia parametrov je postup, pri ktorom parametrom modelu priraďujeme špecifické numerické hodnoty. Robíme to najčastejšie aplikovaním metód matematickej štatistiky, ak, pravda, neexistujú nejaké a priori dôvody pre priradenie tých alebo oných hodnôt.

Poslednou fázou konštrukcie matematického modelu je jeho testovanie. Ním zisťujeme, či nevyhnutný nesúlad medzi modelom a originálom nepresahuje prípustnú mieru, pri ktorej ešte môže model správne fungovať. Negatívny výsledok testovania môže byť dôvodom reformulácie modelu, a to buď prostredníctvom modifikácie jeho premenných, alebo prijatím vhodnejšej formy závislosti medzi nimi.

*

Sformulovaný matematický model, ktorý úspešne prešiel procedúrami kalibrácie a testovania, vo vedeckom výskume plní najrozmanitejšie funkcie. Aké sú však funkcie matematických modelov v ekonomickej geografii? Adekvátna odpoveď na túto otázku by si vyžadovala nepomerne viac priestoru, než aký máme k dispozícii. Uvedieme preto iba niekoľko príkladov.

Nepochybne najdôležitejšou funkciou každého modelu je fungovať ako spoľahlivý nástroj získavania nových poznatkov. Matematickému modelu to umožňuje aplikácia deduktívneho spôsobu usudzovania, ktoré dovoľuje narábať s mo-

delom iba podľa matematických pravidiel. V úsilí ilustrovať toto tvrdenie vráťme sa ešte raz k modelu (1a), ktorý z rýdzo matematického hľadiska predstavuje exponenciálnu funkciu $y = ce_{kx}$ premennej x , kde a , c , k sú ľubovoľné konštanty, pričom $k \neq 0$. O tejto funkcii je v matematickej analýze známe, že vyhovuje diferenciálnej rovnici typu $y' = ky$ [4, p. 207]. To značí, že z formule (1a) vyplýva formula

$$\frac{dP_x}{dx} = -bP_x, \quad (5)$$

ktorá tvrdí, že prírastok zmien hustoty pri ľubovoľnej vzdialenosti od stredu mesta je nepriamo úmerný iba hodnotám hustoty zaľudnenia alebo (s malou stratou presnosti) čím vyššia je hustota zaľudnenia, tým rýchlejšie poklesáva od stredu mesta [14, p. 94]. Zdôraznime, že tento poznatok sme získali z matematického modelu rýchlou a presnou cestou v podobe deduktívneho úsudku bez akéhokoľvek prihliadania na skutočnosť.

Matematické modely nepoužívame v ekonomickej geografii iba na získanie poznatkov, ale aj na ich overovanie. Testovaním modelu totiž nepriamo overujeme tie poznatky, ktoré stoja tak povediac „pri koreni“ daného modelu, t. j. tie, na základe ktorých bol model sformulovaný alebo tie, ktoré z neho bezprostredne vyplývajú. Napríklad jedným z dôsledkov testovania modelu ekonomickej bázy mesta môže byť zamietnutie predpokladu, že $a = \text{const.}$, čo značí falzifikáciu poznatku, že podiel zamestnanosti v mestoobsluhujúcom sektore a celkovej zamestnanosti v meste je konštantný.

S overovaním veľmi tesne súvisí predpovedanie, pretože úspešná predpoveď zväčšuje našu dôveru v platnosť tých poznatkov, na základe ktorých sa predpoveď uskutočnila. V posledných rokoch môžeme v ekonomickej geografii pozorovať zvýšený záujem o predikčné modely, motivovaný rastúcou účasťou geografov v regionálnom a urbánnom plánovaní. Nie je preto prekvapujúce, že v geografickej literatúre nájdeme celú škálu predikčných modelov, počnúc elementárnymi, ktoré sú založené na extrapolácii trendu v časových radoch až po rigorózne predikčné modely, postulujúce kauzálny vzťah medzi premennými [10]. Pre zaujímavosť uvedieme, že model ekonomickej bázy sa osvedčuje ako spoľahlivý predikčný model v urbánnom plánovaní. Ak totiž v rovnici (2) poznáme hodnotu nezávisle premennej X (zamestnanosť v mestoformujúcom sektore) vo zvolenom budúcom časovom okamihu, ľahko určíme odpovedajúcu hodnotu závisle premennej Y (celková zamestnanosť v meste).

Nakoniec sa ešte zmienime o prezentačnej funkcii matematických modelov, ktorá dovoľuje prezentovať systém poznatkov, napríklad teóriu alebo jej časť v maximálne stručnej a presnej podobe. Význam tejto funkcie netreba osobitne zdôrazňovať, stačí, ak pripomenieme jej úzku súvislosť s takými logicko-metodologickými postupmi, akými sú axiomatizácia a formalizácia. Popri staršom pokuse vynikajúceho lokačného teoretika Augusta Lösch a vyjadriť svoj príspevok k teórii všeobecnej priestorovej rovnováhy systémom piatich matematických formúl [13, pp. 92—100] môžeme ako znamenité prejavy prezentačnej funkcie uviesť novšie snahy o formalizáciu teórie agrárneho využitia zeme [5] alebo niektorých aspektov teórie centrálnych miest [3].

Záverový odsek našej štúdie venujeme krátkemu prehľadu sfér aplikácie niektorých typov matematických modelov. Východiskom z našich úvah je predpoklad, že voľba medzi modelom deterministickým a stochastickým, statickým a dynamickým, deskriptívnym a normatívnym nezávisí ani tak od povahy modelovaného originálu, ako skôr od toho, ako sa na tento originál pozeráme a ktorým jeho stránkam pripisujeme väčší význam. Napríklad, prísne vzaté, závislosti v sociálno-ekonomickej sfére nie sú nikdy deterministické, ale i napriek tomu ich z istého hľadiska alebo v istej rovine skúmania môžeme za také považovať [11, p. 20]. Dôvod, ktorý nás k tomu vedie, je veľmi jednoduchý. Deterministické modely sú v porovnaní so stochastickými modelmi matematicky jednoduchšie, a preto dovoľujú uvažovať viac premenných i komplikovanejšie formy závislosti medzi nimi. Pravda, nie vždy sú primeranou náhradou. Doterajšie skúsenosti nasvedčujú tomu, že sféra ich spoľahlivého fungovania sa viaže na makrogeografický výskum, kde predmetom skúmania sú vecne, priestorove alebo časove vysoko agregované entity (napr. obyvateľstvo alebo ekonomika vcelku alebo iba hrubo členené, veľké územné jednotky, dlhšie časové obdobia). Dôkazom toho je úspešná aplikácia introregionálnych a interregionálnych input-output modelov, interakčných modelov, modelov ekonomickej bázy alebo regionálneho ekonomickeho rastu. Naproti tomu však pri mikrogeografickom prístupe s nízkym stupňom agregácie, kde náhodné faktory vystupujú tak výrazne, že ich zanedbanie by viedlo k vytvoreniu neadekvátneho obrazu skutočnosti, stochastické modely sú ťažko nahraditeľné. Presvedčujú nás o tom napríklad modely migračných procesov, priestorovej difúzie, transportných tokov alebo konfigurácie sídel.

Vzťahu deterministických a stochastických modelov sa do určitej miery podobá aj vzťah medzi statickými a dynamickými modelmi. Aj tu o voľbe typu modelu rozhoduje náš prístup k študovanému originálu a tiež formálne vlastnosti toho-ktorého modelu. Tento posledne menovaný faktor (napr. otázka zaradenia časového oneskorenia do modelu alebo problémy súvisiace s estimáciou parametrov dynamických modelov) je pravdepodobne rozhodujúcou prekážkou rozsiahlejšieho používania dynamických modelov v ekonomickej geografii. Nedostatok dynamických modelov často kompenzujeme konštruovaním postupností statických modelov pre rôzne časové okamihy (alebo intervaly). Je to, prirodzene, iba nedokonalá náhrada, pretože postupnosť modelov zobrazuje iba postupnosť zmien originálu a mechanizmus zmien aj naďalej zostáva ukrytý. Veľa tu, pravda, záleží aj na vlastnostiach originálu. Niektoré priestorové štruktúry, napríklad agrárne alebo sídelné, sú z časového hľadiska dosť stabilné. V týchto prípadoch potom aj statické modely robia dobré služby.

Na záver našej práce pripojíme ešte pár slov o normatívnych modeloch, ktorých význam v priestorovej analýze i v regionálnom a urbánom plánovaní neustále vzrastá. Najznámejším a v praxi najrozšírenejším druhom normatívnych modelov sú modely matematického (t. j. lineárneho, nelineárneho, dynamického, stochastického a pod.) programovania, nachádzajúce široké uplatnenie v situáciách, kde je potrebné nájsť optimálnu kombináciu niekoľkých činností (procesov), ktorá by vyhovovala istým obmedzeniam. Iným druhom sú modely teórie hier týkajúce sa tzv. konfliktných situácií, ktoré vznikajú vtedy, ak niekoľko účastníkov sleduje vzájomne rozporné ciele. Účelom konštrukcie modelov je vypracovať optimálnu stratégiu pre každého účastníka, t. j. určiť taký sled akcií, ktoré by znížili možné riziko z protiakcií pro-

tivníkov na minimum. Výrazným geografickým kontextom sa vyznačujú modely teórie grafov a tzv. lokačno-alokačné modely. Prvý druh modelov sa vzťahuje na spojovacie problémy a rieši napríklad problémy optimálnych transportných sietí, najkratších alebo okružných ciest, problémy kapacity, priepustnosti a tokov v sieťach a pod. Druhý druh sa zaoberá otázkami súčasného optimálneho umiestnenia a vzájomného priradenia niekoľkých objektov, prirodzene za určitých vopred stanovených podmienok. Znamenitý prehľad normatívnych modelov a ich geografickej aplikácie môže nájsť čitateľ v práci [19].

*

V predloženej štúdií sme sa stručným a prístupným spôsobom pokúsili demonštrovať význam matematického modelovania v ekonomickej geografii. Význam a užitočnosť mnohých „vecí“ najlepšie možno posúdiť v procese ich používania. Domnievame sa, že aj matematické modely patria k „veciam“ tohto druhu. Ak teda táto štúdia v slovenskej geografii záujem o používanie matematických modelov, potom splní svoj pôvodný cieľ.

¹ Aspoň na tomto mieste poznamenajme, že všetky dosiaľ uvedené modely sú modelmi deterministického typu; pritom modely {1a}, {2}, {3} sú statické a model {1b} je dynamický. Elementárnym príkladom statického stochastického modelu môže byť jeden z modelov rozdelenia migračných vzdialeností [15], nazývaný modelom Pareto:

$$P(d) = ad^b. \quad (4)$$

Tu $P(d)$ značí pravdepodobnosť migrácie na vzdialenosť d , a a b sú parametre modelu. Dynamické stochastické modely sú v ekonomickej geografii pomerne vzácne. Ako príklad môžeme spomenúť niektoré migračné modely budované na báze teórie stochastických procesov [20].

LITERATÚRA

1. BERKA, K.; TONDL, L.: Teorie modelů a modelování. Praha 1967. — 2. BERRY, B. J. L.; HORTON, F. E.: Geographic perspectives on urban systems. Englewood Cliffs 1970. — 3. BERRY, B. J. L.; BARNUM, H. G.: Aggregate relations and elemental components of central place systems. Journal of Regional Science, 4, 1962, pp. 35–42. — 4. COURANT, R.: Kurs diferencialného i integralného isčislenija. Moskva 1967. — 5. GARRISON, W. L.; MARBLE, D. F.: The spatial structure of agricultural activity. Annals of the Association of American Geographers, 47, 1957, pp. 137–144. — 6. HARVEY, D.: Explanation in geography. London 1969. — 7. CHOJNICKI, Z.: Modele matematyczne w geografii ekonomicznej. Przegląd Geograficzny, 39, 1967, pp. 115–134. — 8. CHORLEY, R. J.: Geography and analogue theory. Annals of the Association of American Geographers, 54, 1964, pp. 127–137. — 9. CHORLEY, R. J.; HAGGETT, P.: Models in geography. London 1967. — 10. CHISHOLM, M.; FREY, A. E.; HAGGETT, P.: Regional forecasting. London 1970.

11. KORDA, B.: Matematické metody v ekonomii. Praha 1967. — 12. LOWRY, I. S.: A short course in model design. Journal of the American Institute of Planners, 31, 1965, pp. 158–165. — 13. LÖSCH, A.: The economics of location. New Haven 1954. — 14. MEDVEDKOV, Ju. V.: Ekonomogeografičeskaja izučennost' rajonov kapitalističeskogo mira, 2. Moskva 1965. — 15. MORRILL, R. L.: The distribution of migration distances. Regional Science Association, Papers, 11, 1963, pp. 75–84. — 16. NEWLING, B. E.: Urban growth and spatial structure: mathematical models and empirical evidence. Geographical Review, 56, 1966, pp. 213–225. — 17. OLSSON, G.: Distance and human interaction: a bib-

liography and review. Regional Science Research Institute, Bibliography Series, 2, 1965. — 18. PAULOV, J.: Niektoré problémy a aspekty exaktizačného procesu v geografii. Geografický časopis SAV, 18, 1966, pp. 252—268. — 19. SCOTT, A. J.: Combinatorial programming, spatial analysis and planning. London 1971. — 20. TERMOTE, M.: Les modes de migration: une perspective d'ensemble. Recherches Économiques de Louvain, 33, 1967, pp. 413—444.

21. WILSON, A. G.: Models in urban planning: a synoptic review of recent literature. Urban Studies, 5, 1968, pp. 249—267.

Anton Bezák

SOME COMMENTS ON MATHEMATICAL MODELLING IN HUMAN GEOGRAPHY

This short paper represents a survey of relevant methodological problems regarding the mathematical modelling in human geography. It consists of four sections.

The introductory section provides a general discussion of the nature of models with a special attention to mathematical models. The basic principles of the model building and the main functions of mathematical models are reviewed in the second and third sections, respectively. In these sections the urban population density models, the interaction model, and the urban economic base model are examined as elementary and illustrative examples. The final section contains some remarks on the various types of mathematical models, as well as on the fields of their application in human geography.

Translated by the author