

## Geneze neoklasických modelů růstu<sup>1</sup>

Petr DUCZYNSKI\*

---

### The Genesis of the Neoclassical Models of Growth

#### Abstract

*The paper provides a Central European reader with some information concerning the knowledge in the field of economic growth. Information on neoclassical growth models (the Solow-Swan model and the Ramsey model) is given. We present production functions, the dynamic equations of the models, the steady state, and transitional dynamics. We discuss three variants of the introduction of the technological advance to the Solow-Swan model and possible extensions of this model. The problematic behavior of the neoclassical models in an open-economy setup is mentioned. The paper selects the AK model, which does not exhibit transitional dynamics, and the Uzawa-Lucas model, which on the contrary exhibits transitional dynamics, as examples of endogenous models. We discuss the modeling of the technological change and technological diffusion.*

**Keywords:** economic growth, endogenous models, neoclassical models, technological change

**JEL Classification:** D90, O41

---

#### Úvod

Moderní makroekonomie se člení na dvě hlavní oblasti – krátkodobé kolísání ekonomiky (hospodářské cykly) a dlouhodobý ekonomický růst. Dlouhodobý růst – to je vlastně růst potenciálního reálného hrubého domácího produktu (HDP) v čase, případně růst potenciálního reálného HDP na jednoho obyvatele. Tato oblast makroekonomie je dnes považována za minimálně tak významnou jako krátkodobé fluktuace.

---

\* Petr DUCZYNSKI, Univerzita Hradec Králové, Fakulta informatiky a managementu, Katedra ekonomie, Rokitského 62, 500 03 Hradec Králové, Česká republika; e-mail: petr.duczynski@uhk.cz

<sup>1</sup> Tento příspěvek byl částečně podporován Grantovou agenturou České republiky, číslo grantu 402/04/0642.

I malé roční změny v růstu produktu mohou mít *velké dlouhodobé efekty*, pokud se udrží po mnoho desetiletí. Například rozdíl v růstu o 1 % činí po 100 letech rozdíl 170 %, rozdíl v růstu o 2 % by činil úctyhodných 624 %.

Postkomunistické země ve střední a východní Evropě dnes mají cíl udržet dlouhodobě vysoký růst HDP, aby se přibližovaly úrovni vyspělých zemí. Jsou v podobné situaci jako západní Evropa nebo Japonsko po druhé světové válce. Tento článek se snaží střeoevropskému čtenáři přiblížit některé poznatky z teorie růstu, které již jsou známé ve světové literatuře, a stručně prezentovat některé vlastní výsledky výzkumu autora.

Zaměříme se zejména na neoklasické růstové modely. Alternativou těchto modelů jsou neokeynesiánské modely, jejichž základy vypracovali Roy Harrod a Evsey Domar ve 30. a 40. letech dvacátého století. Produkční funkce v neokeynesiánských modelech neuvažuje substituci mezi kapitálem a prací. Tyto modely implikují to, že kapitalismus vede k neustálému růstu nezaměstnanosti, nebo neustálému růstu nečinného kapitálu. Toto je ukázáno v knize Barra a Sala-i-Martina [2, s. 46 – 49]. Neoklasické modely se liší od neokeynesiánských modelů zejména v tom, že již uvažují substituci mezi kapitálem a prací. Jednou z předností tohoto přístupu je skutečnost, že neoklasické růstové modely nevyskazují problematické chování kapitálu nebo práce jako neokeynesiánské modely. Dalším pozitivním rysem většiny neoklasických modelů je existence konvergence, která je v jisté podobě empiricky pozorována. Nedostatkem exogenních neoklasických modelů je fakt, že nevysvětlují dlouhodobý růst ekonomiky uvnitř modelu.

Tento článek je organizován takto: část 1 diskutuje základní pilíř neoklasických modelů – Solowův-Swanův model. Ve druhé části se prezentují hlavní myšlenky obecnějšího neoklasického modelu – modelu Ramseyho. V části 3 se článek zabývá otevřenou ekonomikou v kontextu neoklasického růstu, kde vznikají jisté teoretické potíže. Část 4 je věnována modernějším partiím teorie růstu – endogenním růstovým modelům. Část 5 se zaměřuje na technologickou změnu – významný motor růstu. Poslední část článku uzavírá.

## 1. Solowův-Swanův model

### *Základní předpoklady modelu*

Tento model je exogenním neoklasickým růstovým modelem, který nezávisle na sobě publikovali v roce 1956 Robert Solow a Trevor Swan. Model pracuje s produkční funkcí, do které vstupují kapitál, práce a technologie. Práce ( $L$  – *labor*) roste exogenně daným konstantním tempem, které bývá ztotožňováno s tempem růstu populace ( $n$ , pro americkou ekonomiku dlouhodobě kolem 1 %

ročně). Kapitál ( $K$ ) se akumuluje v čase, což závisí na míře investic ( $I$ ). Daný model uvažuje uzavřenou ekonomiku, tudíž platí zde rovnost investic a úspor ( $S - Savings$ ). Úspory jsou dány konstantním poměrem z produktu ( $Y$ ), tedy *míra úspor*  $s = S/Y$  se v čase nemění. To je významný předpoklad modelu. Nejčastěji užívaným typem produkční funkce bývá Cobbova-Douglasova funkce:

$$Y = F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha} \quad (1)$$

kde

- $\alpha$  – podíl kapitálu na vytvořeném produktu,
- $1 - \alpha$  – podíl práce na vytvořeném produktu,
- $A$  – technologický parametr.

Tato produkční funkce se někdy zobecňuje na funkci s konstantní elasticitou substituce (CES – Constant Elasticity of Substitution) mezi prací a kapitálem [2, s. 43]:<sup>2</sup>

$$Y = F(K, L) = A \{a(bK)^\psi + (1-a)[(1-b)L]^\psi\}^{1/\psi} \quad (2)$$

kde  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$  a  $\psi < 1$  jsou parametry. Elasticita substituce mezi kapitálem a prací je  $1/(1 - \psi)$ . Cobbova-Douglasova produkční funkce předpokládá substituci mezi kapitálem a prací a elasticita substituce je v tomto případě rovna jedné. Tato funkce je tzv. neoklasická, tedy splňuje tři následující podmínky:

- Mezní produkt práce a kapitálu je kladný a klesající. Tedy první parciální derivace produktu podle kapitálu či práce je kladná, druhá parciální derivace produktu podle kapitálu či práce je záporná. Podmínka pro smíšenou derivaci není určena.
- Existují konstatní výnosy z rozsahu. Při vynásobení kapitálu a práce libovolným faktorem  $\lambda$  se i produkt vynásobí faktorem  $\lambda$ .
- Jsou splněny takzvané Inadovy podmínky. Limity mezního produktu jsou nekonečně velké, pokud se příslušný výrobní faktor blíží 0, a jsou 0, pokud se příslušný výrobní faktor blíží nekonečnu.

### ***Dynamické rovnice***

Základní pohybová rovnice pro vývoj kapitálu je

$$dK/dt = I - \delta K = sF(K, L) - \delta K \quad (3)$$

kde

- $dK/dt$  – časová derivace kapitálu,
- $\delta$  – míra znehodnocení kapitálu (*depreciation*, zpravidla 5 – 6 % ročně),
- $F(K, L)$  – produkční funkce.

---

<sup>2</sup> Tato kniha Roberta Barra a Xaviera Sala-i-Martina vyšla v roce 2003 ve druhém, poněkud upraveném vydání.

Bývá výhodné pracovat s intenzitními proměnnými, tedy s HDP na obyvatele ( $y = Y/L$ ) a kapitálem na obyvatele ( $k = K/L$ ). Produkt na obyvatele,  $y$ , se dá vyjádřit jako jednoznačná funkce kapitálu na obyvatele, a to ve tvaru  $y = f(k)$ . Tato vlastnost plyne z konstantních výnosů z rozsahu funkce  $F(K, L)$ , platí, že  $f(k) = F(K/L, 1)$ . V intenzitních proměnných má dynamická rovnice tvar [2, s. 18]:

$$dk/dt = sf(k) - (n + \delta)k \quad (4)$$

### ***Stav stálého růstu (a steady state)***

Solowův-Swanův model má tzv. stav stálého růstu. Obecně je tento stav definován jako stav, ve kterém rostou všechny kvantitativní proměnné konstantním tempem (toto tempo se v principu může lišit pro různé proměnné). U Solowova-Swanova modelu (bez technologické změny) platí ve stavu stálého růstu podmínka  $dk/dt = 0$ , tedy i  $dy/dt = 0$ . Hodnoty veličin  $k$  a  $y$  ve stavu stálého růstu se zpravidla značí  $k^*$ ,  $y^*$ . Platí podmínka

$$sf(k^*) = (n + \delta)k^* \quad (5)$$

Odtud je  $k^*$  implicitně dáno jako funkce parametrů  $s$ ,  $n$  a  $\delta$ . Spotřeba na obyvatele ve stavu stálého růstu,  $c^*$ , je dána jako  $c^* = (1 - s)f(k^*)$ , a je tedy též konstantní. Z již uvedených vztahů se dá  $c^*$  vyjádřit jako

$$c^* = f(k^*) - (n + \delta)k^* \quad (6)$$

Zajímavým problémem je najít takovou hodnotu  $s$  a  $(k^*)$  pro pevné hodnoty ostatních parametrů, pro niž bude  $c^*$  maximalizováno. Maximum  $c^*$  je dosaženo, pokud  $f'(k^*) = n + \delta$ , kde  $f'(k^*)$  je derivace  $f$  podle  $k$  v bodě  $k = k^*$ . Tato podmínka se nazývá *zlaté pravidlo akumulace kapitálu*. Interpretace je jednoduchá: Pokud budou následující generace spotřebovávat stejně jako generace současná, potom je maximální spotřeba na obyvatele dána zlatým pravidlem.

### ***Tranzitivní dynamika***

Význačnou vlastností Solowova-Swanova modelu je *konvergence*. Pokud je kapitál na obyvatele (a produkt na obyvatele) pod hodnotou odpovídající stavu stálého růstu, bude se v čase zvyšovat a konvergovat k tomuto stavu. Tato vlastnost modelu plyne z klesajících výnosů z kapitálu. Pokud jsou naopak dané stavové proměnné nad stavem stálého růstu, snižují se a též konvergují k tomuto stavu. Podle principu konvergence by chudší ekonomiky měly dohánět ekonomiky bohatší. Rychlost konvergence v Solowově-Swanově modelu závisí na podílu kapitálu na vytvořeném produktu (parametr  $\alpha$  v Cobby-Douglasově produkční funkci) a má tvar [2, s. 36]:

$$\beta = (1 - \alpha)(x + n + \delta) \quad (7)$$

Zde jsme zavedli do modelu technologický pokrok,  $\beta$  je konvergenční koeficient,  $x$  je technologický pokrok rozšiřující pracovní vstup,  $n$  je populační růst a  $\delta$  je míra znehodnocení kapitálu. Pohybová rovnice pro produkt na obyvatele je v tomto případě aproximativně dána jako

$$g = (dy/dt)/y = g^* - \beta \ln(y/y^*) \quad (8)$$

kde  $g^*$  je růst produktu na obyvatele ve stavu stálého růstu. Barro a Sala-i-Martin zpravidla uvažují  $g^* = x = 0,02$ ,  $n = 0,01$  a  $\delta = 0,05$ . Podíl fyzického kapitálu na vytvořeném produktu se pro ekonomiku USA pohybuje kolem 1/3. Pro tyto hodnoty vychází  $\beta$  přibližně 5,3 %. Takto rychlá konvergence však většinou není empiricky pozorována. Barro a Sala-i-Martin zpravidla pozorují tzv. podmíněnou konvergenci kolem 2 % ročně [2, kap. 11 a 12]. Aby Solowův-Swanův model implikoval takto pomalou konvergenci, musel by být podíl kapitálu  $\alpha$  vyšší než 1/3. Toho lze docílit, pokud se kapitál chápe široce – fyzický kapitál (tovární budovy a stroje, rezidenční kapitál) rozšířený o lidský kapitál. Pokud by bylo  $\alpha = 0,75$ , vyšlo by  $\beta = 2$  %, což je v souladu s empirickými pozorováními. Tato konvergence je pomalá. Znamená to, že jedna polovina počáteční mezery je eliminována za 35 let a tři čtvrtiny této mezery za 70 let [2, s. 38].

V empirických studiích se konvergence dělí na *absolutní* a *podmíněnou*. Absolutní konvergence nastává tehdy, když chudé země mají tendenci dohánět země bohaté. Toto se empiricky zpravidla nepozoruje – existuje spíše mírná tendence k absolutní divergenci – bohaté ekonomiky rostou v průměru nepatrně rychleji než chudé ekonomiky, alespoň to platilo do nedávné minulosti. Proto empirické studie zavádějí na pravou stranu regresních rovnic dodatečné proměnné, které nějak aproximují stav stálého růstu. Mezi tyto proměnné patří například lidský kapitál, otevřenost ekonomiky, politická stabilita, míra vládní intervence apod. Pokud se pak pozoruje konvergence – negativní závislost růstu na počáteční hodnotě produktu na obyvatele, hovoří se o konvergenci podmíněné. Podle tohoto konceptu ekonomika konverguje ke svému stavu stálého růstu, chudé ekonomiky mohou mít tento stav nižší než bohaté ekonomiky, proto nemusejí růst rychleji než ekonomiky bohaté. Strukturálně podobné ekonomiky (např. země OECD nebo státy USA) by měly mít i podobné stavy stálého růstu, proto Barro a Sala-i-Martin v těchto skupinách zpravidla pozorují konvergenci absolutní.

Dalším rozdělením konvergence je rozdělení na tzv.  $\beta$ -konvergenci a  $\sigma$ -konvergenci. Když ekonomiky mají tendenci konvergovat ke svému stavu stálého růstu, tedy pokud růst produktu závisí negativně na počáteční hodnotě produktu na obyvatele, hovoříme o  $\beta$ -konvergenci. Ta bývá zkoumána v regresních studiích. Pokud se rozptýlí hodnoty produktu na obyvatele v daném souboru dat systematicky

sníží v čase, hovoříme o  $\sigma$ -konvergenci. Důležitým pravidlem je, že  $\beta$ -konvergence neimplikuje  $\sigma$ -konvergenci. Například v pořadí družstev v ligové soutěži existuje v čase  $\beta$ -konvergence, přední družstva mají tendenci své pozice ztrácet, nemohou už více získávat, ale neexistuje  $\sigma$ -konvergence – rozptýl pořadí se nemění. Naopak,  $\sigma$ -konvergence implikuje  $\beta$ -konvergenci.

### ***Zavedení technologického pokroku***

Solowův-Swanův model bez technologického pokroku vede ke konvergenci kapitálu, produktu a spotřeby (vše měreno na jednoho obyvatele), ke stavu stálého růstu, kde ale už tyto veličiny nerostou. Abychom docílili i dlouhodobého růstu těchto intenzitních veličin, musíme do modelu zavést technologický pokrok. Existují tři varianty, jak technologický pokrok zavést:

- Hicks-neutrální technologické inovace:  $Y = F(K, L, t) = T(t)F(K, L)$ , kde  $t$  je čas,  $T(t)$  je index stavu technologie a  $dT(t)/dt$  je nezáporné. Zde technologická změna rozšiřuje celkový výstup.
- Harrod-neutrální technologické inovace:  $Y = F[K, LA(t)]$ , kde  $A(t)$  je index technologie a  $dA(t)/dt$  je nezáporné. Zde technologická změna rozšiřuje pracovní vstup.
- Solow-neutrální technologické inovace:  $Y = F[KB(t), L]$ , kde  $B(t)$  je index technologie a  $dB(t)/dt$  je nezáporné. Zde technologická změna rozšiřuje kapitálový vstup.

Aby pro obecnou produkční funkci existoval stav stálého růstu, musí být technologická změna Harrod-neutrální.

### ***Rozšíření Solowova-Swanova modelu***

V práci [8] prezentujeme určité rozšířené verze tohoto modelu. Počítáme konvergenční koeficient pro případ, kdy míra znehodnocení kapitálu závisí na kapitálové zásobě, a pro případ, kdy míra úspor závisí na kapitálu. Do modelu jsme zavedli technologickou difúzi. V tomto případě má Jacobiho matice popisující log-linearizované pohybové rovnice dvě negativní vlastní čísla a dynamika modelu je poměrně bohatá. Chování produktu může být nemonotónní v čase. Dále řešíme log-linearizovaný model se dvěma typy kapitálu (fyzickým a lidským kapitálem). Uvažujeme situaci, kdy je míra úspor pro fyzický kapitál závislá na lidském kapitálu, a situace, kdy jsou míry úspor závislé na výnosových mírách pro jednotlivé typy kapitálu. Ukazuje se, že zde může existovat nerovnovážený (imbalanční) efekt mezi fyzickým a lidským kapitálem – růst produktu závisí na poměru fyzického a lidského kapitálu.

Solowův-Swanův model je základním typem neoklasického (exogenního) růstového modelu. Rozšířením tohoto modelu je Ramseyho model, který na rozdíl od Solowova-Swanova modelu uvažuje endogenní míru úspor. Další významnou třídou modelů jsou endogenní růstové modely.

## 2. Ramseyho model

Tento model byl zkonstruován ve 20. letech minulého století [16] a upraven v 60. letech [3; 12]. Podobně jako Solowův-Swanův model je tento model neoklasickým modelem pracujícím s produkční funkcí s konstantními výnosy z rozsahu a klesající mezní produktivitou kapitálu (při fixované práci). Na rozdíl od Solowova-Swanova modelu se zde endogenizují rozhodnutí jednotlivců o míře úspor, míra úspor už není fixovaná.

Zavádí se zde užitková funkce, jejímž argumentem je spotřeba na obyvatele (*consumption* –  $c$ ). Často užívanou užitkovou funkcí je funkce s konstantní elasticitou intertemporální substituce [2, s. 64]:

$$u(c) = (c^{1-\theta} - 1)/(1 - \theta) \quad (9)$$

kde  $\theta > 0$  je inverzní elasticita intertemporální (mezičasové) substituce. Pokud  $\theta$  konverguje k 1, přechází tato funkce ve funkci logaritmickou. Jednotlivci maximalizují celkový diskontovaný užitek v čase (integrál diskontované užitkové funkce), přičemž vazbou je dynamická rovnice pro kapitál:

$$dK/dt = F(K, L) - C - \delta K \quad (10)$$

kde

- $F(K, L)$  – produkční funkce,
- $C$  – celková spotřeba,
- $\delta$  – míra znehodnocení kapitálu.

Výsledkem je soustava dvou diferenciálních rovnic pro dvě proměnné – spotřebu a kapitál. Diferenciální rovnice pro spotřebu plyne z podmínek prvního řádu daného optimalizačního problému. Je to okrajový problém (*boundary problem*) – je dána počáteční hodnota kapitálu, nikoliv spotřeby, a je dáno asymptotické chování kapitálu (podmínkou transversality).

Řešení tohoto problému vykazuje sedlovou stabilitu (*saddle-path stability*), kdy systém konverguje ke stavu stálého růstu. Analytické řešení obecného problému není pro obecné specifikace preferencí a technologie možné, řešení se provádí zpravidla numericky.

Řešení pro blízké okolí stavu stálého růstu je možné najít analyticky v log-lineární aproximaci – Jacobiho matice má jedno kladné a jedno záporné vlastní číslo, v řešení figuruje pouze exponenciální člen se záporným vlastním číslem (jehož absolutní hodnota je rovna rychlosti konvergence), aby byla splněna podmínka transversality. V zásadě se Ramseyho model příliš neliší od Solowova-Swanova modelu, má jen o něco bohatší dynamiku vzhledem k endogennímu charakteru míry úspor.

### 3. Neoklasické růstové modely otevřené ekonomiky

Ramseyho model otevřené ekonomiky je diskutován v kapitole 3 knihy Barra a Sala-i-Martina [2]. Tento model vykazuje některé problematické vlastnosti. Plně otevřená ekonomika může volně exportovat či importovat kapitál. Kapitál proudí do ekonomik, kde je výnosová míra kapitálu vysoká. Výnosová míra kapitálu (úroková sazba) je dána mezním produktem kapitálu. Pokud je ekonomika chudá na kapitál, je za jinak stejných okolností výnosová míra kapitálu vysoká (princip klesajících výnosů) a ekonomika má tendenci kapitál dovážet (mít deficity běžného účtu platební bilance). Plně otevřená ekonomika by teoreticky tento kapitál dovezla nekonečně rychle, kapitál a produkt by se okamžitě zvýšily na úroveň ustáleného stavu. Tato okamžitá konvergence však není empiricky pozorovaná. Dalším problematickým chováním modelu otevřené ekonomiky je chování spotřeby a aktiv. Ukazuje se, že země s vysokou mírou časové preference (země, které více preferují současnou spotřebu před spotřebou budoucí) by měly asymptoticky snižovat spotřebu na efektivní jednotku práce k nule a měly by se silně zadlužovat (dluh by se rovnal úrovni celého domácího kapitálu a budoucího příjmu z práce). Toto též není v realitě pozorováno.

Existují tři principiální řešení problematického chování otevřené ekonomiky:

- zápůjční omezení (*credit constraints*),
- instalační náklady (*adjustment costs*),
- nahrazení nekonečného časového horizontu horizontem konečným (*finite horizon*).

Barro, Mankiw a Sala-i-Martin [1] prezentují neoklasický růstový model otevřené ekonomiky se zápůjčními omezeními. Předpokládají, že jenom část domácího kapitálu je mezinárodně pohyblivá (např. fyzický kapitál je pohyblivý, zatímco lidský kapitál je nepohyblivý), dluh dané ekonomiky nemůže překročit úroveň pohyblivého kapitálu. Úvěrově omezená ekonomika (*a credit-constrained economy*) má dluh roven své pohyblivé části kapitálu. Barro, Mankiw a Sala-i-Martin ukazují, že úvěrově omezené ekonomiky konvergují pomalu, podobně jako uzavřené ekonomiky. Problém však je, že většina ekonomik není dostatečně zadlužená, aby se dala při rozumné mezinárodní kapitálové pohyblivosti považovat za ekonomiky úvěrově omezené, jak jsme ukázali studiem čistých vnějších aktiv pro 113 zemí a 51 států USA [4]. Zvláště pro regionální a hodně otevřené ekonomiky, jako jsou například státy USA, je toto vážný problém. Empiricky tyto ekonomiky konvergují, ale pomalu.

Pomalou konvergenci kapitálu a produktu ke stavu stálého růstu mohou pomoci vysvětlit instalační náklady pro investice. Tyto náklady závisí na poměru investic k existujícímu kapitálu. Pokud se hodně investuje vzhledem k úrovni kapitálu, jsou tyto náklady vysoké. Instalační náklady odrážejí skutečnost, že je

obtížné kapitál v krátké době zvýšit, tyto náklady mohou být zvláště významné pro lidský kapitál, kdy je velmi obtížné získat určité znalosti v krátkém čase [2, s. 119]. Každý jistě má zkušenost s tím, že je velmi obtížné se v krátkém čase naučit cizí jazyk. U fyzického kapitálu si lze instalační náklady představit tak, že manažeři prostě dělají při větším investování více chyb, dělníci se musí učit s novým kapitálem pracovat apod.

Velikost instalačních nákladů určuje velikost tzv. Tobinova  $q$ . Problémem je, že potřebujeme dost vysokou hodnotu Tobinova  $q$ , abychom docílili pomalé konvergence. Empirické studie však většinou udávají hodnotu  $q$  pro fyzický kapitál jen o něco málo větší než 1, což k pomalé konvergenci nestačí. Určitým řešením by bylo předpokládat, že  $q$  je vysoké pro lidský kapitál [5]. I tak je zde ale problém s chováním spotřeby a aktiv – to samotné instalační náklady nedokáží napravit. Tento problém se dá vyřešit zavedením konečného časového horizontu [2, s. 110]. Aby tedy neoklasický růstový model fungoval dobře i v případě otevřené ekonomiky, je potřeba kombinovat více variant rozšiřujících daný model. I tak je to však složitý problém, kterým se zřejmě bude zabývat budoucí výzkum.

#### 4. Endogenní růstové modely

Endogenní modely se objevily ve vědecké literatuře na konci 80. let dvacátého století [13; 17] a od té doby jim byla věnována mimořádná pozornost. V těchto modelech se rychlost dlouhodobého růstu určuje uvnitř daného modelu, není tedy dána exogenně. Zpravidla neexistují klesající výnosy z kapitálu jako v exogenních modelech. Nejjednodušším endogenním růstovým modelem je tzv. AK model, kde je produkční funkce lineární v kapitálu:

$$Y = AK \quad (11)$$

kde

$Y$  – produkt,

$A$  – technologický parametr,

$K$  – kapitál – v tomto případě kapitál v širokém pojetí, zahrnující fyzický i lidský kapitál (*human capital*).

Dynamika tohoto modelu je velmi jednoduchá. Neexistuje zde tranzitivní dynamika, ekonomika je vždy ve stavu stálého růstu, kde kapitál, produkt a spotřeba rostou konstantním a shodným tempem. Tedy neexistuje konvergence. Užítková funkce v daném modelu mívá zpravidla konstantní elasticitu mezičasuové (intertemporální) substituce, tuto funkci jsme uvedli v části věnované Ramseyho modelu. Specifikaci preferencí v AK modelu jsme rozšířili – uvažovali

jsme Stoneyho-Gearyho preference, exponenciální preference, kvadratické preference a dále pak užitkové funkce, do nichž vstupovaly kapitál a investice [10]. V těchto rozšířeních měl AK model bohatší dynamiku.

Model AK se dá rozšířit o lidský kapitál [2, s. 172]:

$$Y = AK^\alpha H^{1-\alpha} \quad (12)$$

kde

- $K$  – nyní pouze fyzický kapitál,
- $H$  – lidský kapitál,
- $0 < \alpha < 1$  – podíl fyzického kapitálu,
- $1 - \alpha$  – pak podíl lidského kapitálu na vytvořeném produktu.

Pokud neexistují instalační náklady a  $K$  se může volně přeměňovat na  $H$  (případně naopak), je v tomto modelu okamžitá konvergence do stavu stálého růstu. V tomto okamžitém procesu se počáteční  $K$  přemění na  $H$  (případně naopak) tak, aby výnosová míra z  $H$  byla rovna výnosové míře z  $K$ . Pak se model chová jako AK model. Pokud se kapitály nemohou mezi sebou volně přelévát, konvergence do stavu stálého růstu je postupná. Hrubé investice do kapitálu, který je na počátku v přebytku, jsou nulové, tento kapitál postupně znehodnocuje v čase, až se nakonec výnosové míry z  $K$  a z  $H$  vyrovnají. Pak se též model chová jako běžný AK model.

Rozšířením již uvedených modelů je tzv. *Uzawův-Lucasův model* [20; 13]. Tento model obsahuje dva typy kapitálu – lidský kapitál  $H$  a fyzický kapitál  $K$  – a dva sektory – jeden sektor vyrábějící  $K$  a druhý sektor vyrábějící  $H$ . Jenom  $K$  se může volně konvertovat do spotřeby  $C$ . Do výroby  $K$  vstupuje celý existující  $K$  a část existujícího  $H$  (zpravidla ve formě Cobbovy-Douglasovy produkční funkce), do výroby  $H$  vstupuje zbylá část existujícího  $H$ , a to v lineární podobě. Maximalizuje se diskontovaný tok užitku plynoucího ze spotřeby při vazbách daných pohybovými rovnicemi

$$dK/dt = Y - C - \delta K = AK^\alpha (uH)^{1-\alpha} - C - \delta K \quad (13)$$

$$dH/dt = B(1-u)H - \delta H \quad (14)$$

kde

- $A$  a  $B$  – technologické parametry,
- $Y$  – produkt,
- $u$  – část lidského kapitálu zaměstnaná ve výrobě fyzického kapitálu,
- $\delta$  – míra znehodnocení obou dvou typů kapitálu.

V růstové literatuře se tyto dvě míry často považují za totožné. Uzawův-Lucasův model má stav stálého růstu, ve kterém  $Y$ ,  $K$ ,  $H$  a  $C$  rostou konstantním a shodným tempem (pokud neuvažujeme externalitu) a  $u$  je konstantní v intervalu od 0 do 1. Pokud je poměr  $H$  a  $K$  jiný než poměr odpovídající stavu stálého

růstu, model má tranzitivní dynamiku – postupně konverguje do stavu stálého růstu. Tuto dynamiku je možné studovat numericky [14], nebo je možné model log-linearizovat v okolí stavu stálého růstu a řešit analyticky soustavu tří rovnic, například pro proměnné  $C/K$ ,  $H/K$  a  $u$  [11]. Ukazuje se, že růst produktu závisí někdy kladně, někdy záporně na poměru  $H/K$ . Empiricky relevantní je však pouze kladná závislost – je to zkušenost poválečných zemí, které většinou za války utrpěly větší ztráty na majetku než na lidských životech a které pak rostly rychle. Příkladem mohou být Západní Německo a Japonsko po druhé světové válce. V naší práci [9] se empiricky zabýváme závislostí růstu reálného produktu na obyvatel na poměru  $H/K$ , kde studujeme tuto závislost pro 73 zemí mezi lety 1960 a 1990 a skutečně jsme našli statisticky signifikantně pozitivní vztah. V Uza-waově-Lucasově modelu by byl tento tzv. asymetrický nerovnovážný efekt mezi lidským a fyzickým kapitálem zřetelnější, pokud by se model rozšířil o asymetrické instalační náklady – větší náklady pro lidský kapitál než pro fyzický kapitál.

## 5. Modelování technologické změny

Existují dva hlavní typy modelů s technologickou změnou – modely s expandujícím množstvím produktů [2, s. 212] a modely se zvyšující se kvalitou produktů [2, s. 240]. První typ těchto modelů se dělí na dva podtypy – modely s expandujícím množstvím vstupů pro firmy a modely s expandujícím množstvím spotřebních statků. Tyto modely jsou poměrně složité, proto se zde jejich prezentací nebudeme zabývat. Pokud se modely s technologickou změnou aplikují na dvě země, dostáváme *modely s technologickou difúzí*, kdy se úroveň technologie přenáší ze země rozvinuté do země méně rozvinuté. Předpokládá se, že *imitace technologie* v zemi méně rozvinuté je *levnější* než původní inovace v zemi rozvinuté. Zpravidla se uvažuje, že rychlost přenosu technologie je přímo úměrná technologické mezeře mezi rozvinutou a méně rozvinutou zemí a též přímo úměrná lidskému kapitálu v méně rozvinuté zemi – kvalifikovanější manažeři a dělníci mohou novou technologii snáze přijmout [15]. Modely s technologickou difúzí se dají kombinovat s jinými růstovými modely. Tyto modely kombinujeme [6] například s Ramseyho modelem a dostáváme bohatší růstovou dynamiku, kdy může být chování produktu nemonotónní v čase. Při vysoké počáteční úrovni kapitálu ve srovnání s úrovní technologie produkt nejprve klesá – kapitál se snižuje – a pak roste tažen růstem technologie. Model s technologickou difúzí aplikujeme [7] na otevřenou ekonomiku s instalačními náklady pro kapitálové investice a ukazuje se, že počáteční růst může být rychlý v podkapitalizovaných ekonomikách, jakými jsou například tranzitivní ekonomiky – tento růst je tažen vysokými investicemi. Pokud není technologická difúze příliš rychlá, v delším období už tyto ekonomiky rostou pomalu.

## Závěr

Problematika ekonomického růstu dnes patří mezi fundamenty makroekonomie. Tento článek seznamuje čtenáře s některými základními růstovými modely. Věnuje se pozornost modelu Solowovu-Swanovu a Ramseyho modelu jakožto modelům exogenním a neoklasickým. Zmiňuje se jejich problematické chování při aplikaci na otevřenou ekonomiku. Z endogenních růstových modelů vybíráme AK model a Uzawův-Lucasův model. Závěrečná část se krátce zaměřuje na technologickou změnu a technologickou difúzi, což je další možný motor růstu pro chudší ekonomiky (vedle efektu konvergence v neoklasických modelech, kde chudší ekonomiky těží ze zákona klesajících výnosů a vysoké výnosnosti kapitálu).<sup>3</sup>

## Literatura

- [1] BARRO, R. J. – MANKIW, N. G. – SALA-I-MARTIN, X.: Capital Mobility in Neoclassical Models of Growth. *American Economic Review*, 85, 1995, č. 1, s. 103 – 115.
- [2] BARRO, R. J. – SALA-I-MARTIN, X.: *Economic Growth*. New York: McGraw-Hill 1995.
- [3] CASS, D.: Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. *Review of Economic Studies*, 32, 1965, č. 3, s. 233 – 240.
- [4] DUCZYNSKI, P.: Capital Mobility in Neoclassical Models of Growth: Comment. *American Economic Review*, 90, 2000, č. 3, s. 687 – 694.
- [5] DUCZYNSKI, P.: Adjustment Costs in a Two-Capital Growth Model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26, 2002a, č. 5, s. 837 – 850.
- [6] DUCZYNSKI, P.: Technological Diffusion in the Ramsey Model. *International Journal of Business and Economics*, 1, 2002b, č. 3, s. 243 – 250.
- [7] DUCZYNSKI, P.: Convergence in a Model with Technological Diffusion and Capital Mobility. *Economic Modelling*, 20, 2003a, č. 4, s. 729 – 740.
- [8] DUCZYNSKI, P.: On Extended Versions of the Solow-Swan Model. *Bulletin of the Czech Econometric Society*, 10, 2003b, č. 19, s. 39 – 58.
- [9] DUCZYNSKI, P.: On the Empirics of the Imbalance Effect. *International Journal of Business and Economics*, 2, 2003c, č. 2, s. 121 – 128.
- [10] DUCZYNSKI, P.: Preference Variations in the AK Model. *Bulletin of the Czech Econometric Society*, 11, 2004, č. 20, s. 29 – 44.
- [11] DUCZYNSKI, P.: A Note on the Imbalance Effect in the Uzawa-Lucas Model. *Economics Bulletin*, 4, 2007, č. 38, s. 1 – 12.
- [12] KOOPMANS, T. C.: On the Concept of Optimal Economic Growth, in *The Econometric Approach to Development Planning*. Amsterdam: North Holland 1965.
- [13] LUCAS, R. E., Jr.: On the Mechanics of Economic Development. *Journal of Monetary Economics*, 22, 1988, č. 1, s. 3 – 42.
- [14] MULLIGAN, C. B. – SALA-I-MARTIN, X.: Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth. *Quarterly Journal of Economics*, 108, 1993, č. 3, s. 737 – 773.

---

<sup>3</sup> Autor si je vědom skutečnosti, že se v tomto článku hodně sám cituje, ale je to podle jeho názoru pro dobro věci. Mimo jiné se tím snažíme ukázat některé možnosti dalšího výzkumu v oblasti ekonomického růstu.

- [15] NELSON, R. R. – PHELPS, E. S.: Investment in Humans, Technological Diffusion, and Economic Growth. *American Economic Review*, 56, 1966, č. 2, s. 69 – 75.
- [16] RAMSEY, F.: A Mathematical Theory of Saving. *Economic Journal*, 38, 1928, č. 152, s. 543 – 559.
- [17] ROMER, P. M.: Increasing Returns and Long-Run Growth. *Journal of Political Economy*, 94, 1986, č. 5, s. 1002 – 1037.
- [18] SOLOW, R. M.: A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*, 70, 1956, č. 1, s. 65 – 94.
- [19] SWAN, T. W.: Economic Growth and Capital Accumulation. *Economic Record*, 32, 1956, č. 63, s. 334 – 361.
- [20] UZAWA, H.: Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth. *International Economic Review*, 6, 1965, č. 1, s. 18 – 31.