

Výber produkčnej funkcie pri odhade potenciálneho produktu

Pavol OCHOTNICKÝ*

Production Function Choice by Potential Output Estimation

Abstract

The paper surveys and compares the main substitution production function types as one of the key components used by the estimations of potential output or output gap. Based on the theoretical classification of the production functions, Fuss-McFadden-Mundlak opinion and some empirical tests of the production functions in the Slovak Republic, EU countries and USA, the paper: (a) compares the possibility of using different substitution production functions by the potential output or output gap measurement/estimation, (b) evaluates the advantages and disadvantages of using three different basic production function models/groups. In addition, the paper encourages enhancement of the empirical research of production function use with the variable characteristics.

Keywords: *production function, substitution, potential product, production gap*

JEL Classification: C13, C23, C51, D21, D24, E32, H37, E60

Úvod

Vysvetlenie alebo kvantifikácia potenciálneho produktu, resp. produkčnej medzery ako rozdielu medzi potenciálnym a skutočným produktom je predmetom pozornosti tak v kruhoch ekonomickej teórie, výskumu, ako aj pri tvorbe politických rozhodnutí. Napriek relatívne často používanej definícii potenciálneho produktu ako agregovanej ponukovej kapacity ekonomiky, ktorú možno dosiahnuť bez vyvolania inflačných/antiinflačných tlakov, v ekonomických publikáciách a článkoch existuje množstvo rozdielnych teoretických definícií a prístupov, resp. metodológií na odhad potenciálneho produktu a produkčnej medzery.¹

* Pavol OCHOTNICKÝ, Ekonomická univerzita v Bratislave, Národohospodárska fakulta, Katedra financií, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava 5; e-mail: pavol.ochotnickyy@euba.sk

Hlavná ťažkosť pri empirickom odhade potenciálneho produktu rezultuje z faktu, že potenciálny produkt ekonomiky je nepozorovateľnou, hypotetickou premennou veličinou, resp. v reálnej ekonomike je pozorovateľnou veličinou len výnimočne.

Analýza odchýlky skutočného produktu od jeho rovnovážnej (potenciálnej) hladiny a vplyv produkčnej medzery na infláciu je už niekoľko desaťročí objektom záujmu zo strany menových a fiškálnych autorít v každej krajine, ako aj menových a fiškálnych autorít Európskej únie. Nosnou témou sa stal odhad produkčnej medzery najmä z dôvodu preventívnej ochrany jednotlivých krajín či celej EÚ pred inflačnými šokmi, ale aj z dôvodu ohodnotenia absorpčnej schopnosti verejných výdavkov (národného a nadnárodného charakteru), a to bez spôsobenia inflačných tlakov.

Pakt stability a rastu, jeho orientácia aj na cenovú stabilitu v eurozóne a v jednotlivých krajinách, ale najmä jeho aplikácia podnietila vývin spoločnej metodológie EÚ (Európskej komisie) na odhad či meranie potenciálneho produktu a produkčnej medzery. Jedným z kľúčových prvkov pri odhade potenciálneho produktu, požadovaného/odporúčaného Európskou komisiou pre jednotlivé členské štáty (ako integrálnej súčasti konvergenčných programov, resp. programov stability) je agregátna produkčná funkcia typu CD ako základný referenčný model.²

Aj vo všeobecnosti možno konštatovať, že najviac využívaným modelom produkčnej funkcie, či už zo strany jednotlivých inštitúcií, resp. vo vedeckých článkoch a empirických štúdiách, je Cobbova-Douglasova produkčná funkcia (CD), nasledovaná produkčnou funkciou CES (s konštantnou elasticitou substitúcie), resp. ich modifikácie (napr. [10; 40; 46]). Za jednu z tendencií – hlavne v empirických odhadoch produkčných funkcií – možno v posledných rokoch považovať posun od odhadov parametrov produkčných funkcií ekonometrickým spôsobom k odhadu/kalibrácii [16] parametrov produkčných funkcií na základe využitia poznatkov marginalistickej teórie.³

Tento trend je dôsledkom jednak rozvoja ekonometrie, výsledkov výskumov a vedeckých poznatkov ohľadom možného skreslenia ekonometrických odhadov v dôsledku napríklad endogenity vstupov, nestacionarity časových radov a ďalších argumentov [13].

¹ Dominujúce metodológie predstavujú agregované alebo dezagregované prístupy, filtrovacie techniky, prístupy založené na produkčných funkciách v kombinácii s tzv. metodológiou NAIRU (Non Accelerating Inflation Rate of Unemployment) alebo s konceptom NAWRU (Non Accelerating Wages Rate of Unemployment).

² V júli 2002 výbor ECOFIN schválil prístup na báze produkčnej funkcie ako referenčnú metódu na výpočet produkčnej medzery, ktorý Output Gaps Working Group (OGWG) v priebehu rokov 2003 – 2005 ďalej zjemnila.

³ Pozri napríklad [11], resp. nasledujúce empirické testy a vedeckú diskusiu k „existencii zákona produkcie“, napríklad [14].

Renesanciu však prežívajú aj aplikácie a ekonometrické odhady viacfaktorových produkčných funkcií typu tzv. transcendentálnej produkčnej funkcie, ktoré sa pokúšajú o vysvetlenie energetických a materiálových limitov ekonomického rastu.⁴

Vychádzajúc z uvedeného, ďalej z odporúčaní autorov Fuss, McFadden, Mundlak [15], ale aj vzhľadom na hlasy upozorňujúce na možné obmedzenia CD produkčnej funkcie pri kvantifikácii produkčnej medzery v nových členských štátoch⁵ EÚ, resp. v USA [3], príspevok porovnáva hlavné charakteristiky produkčných funkcií CD, CES a tzv. VES produkčnej funkcie (s variabilnou elasticitou substitúcie) a hodnotí výhody a nevýhody aplikácie jednotlivých typov produkčných funkcií pri odhadoch potenciálneho produktu.

1. Metóda na báze produkčnej funkcie

Prevažná časť metód používaných vedeckou obcou, ale aj menovými a fiškálnymi autoritami (vrátane EK) na odhad potenciálneho produktu implicitne predpokladá, že fyzický objem kapitálu a jeho využitie nie sú limitujúcim faktorom na dosiahnutie potenciálneho produktu.

Hlavné limitujúce rastové faktory sú dané využitím pracovných síl a celkovou produktivitou faktorov. Inak povedané, potenciálny produkt (Y^*) je hladinou produktu, ktorá by mohla byť vyprodukovaná v ekonomike pri plnej – štrukturálnej zamestnanosti (LE^*), pri celkovej produktivite výrobných faktorov (TFP^*) a pri existujúcej hladine zásoby kapitálu – cyklicky neupravenej (K). Postup výpočtu potenciálneho produktu na báze produkčnej funkcie umožňuje schéma výpočtu potenciálneho produktu podľa metodológie, ktorú používa EK [10, graf 1].

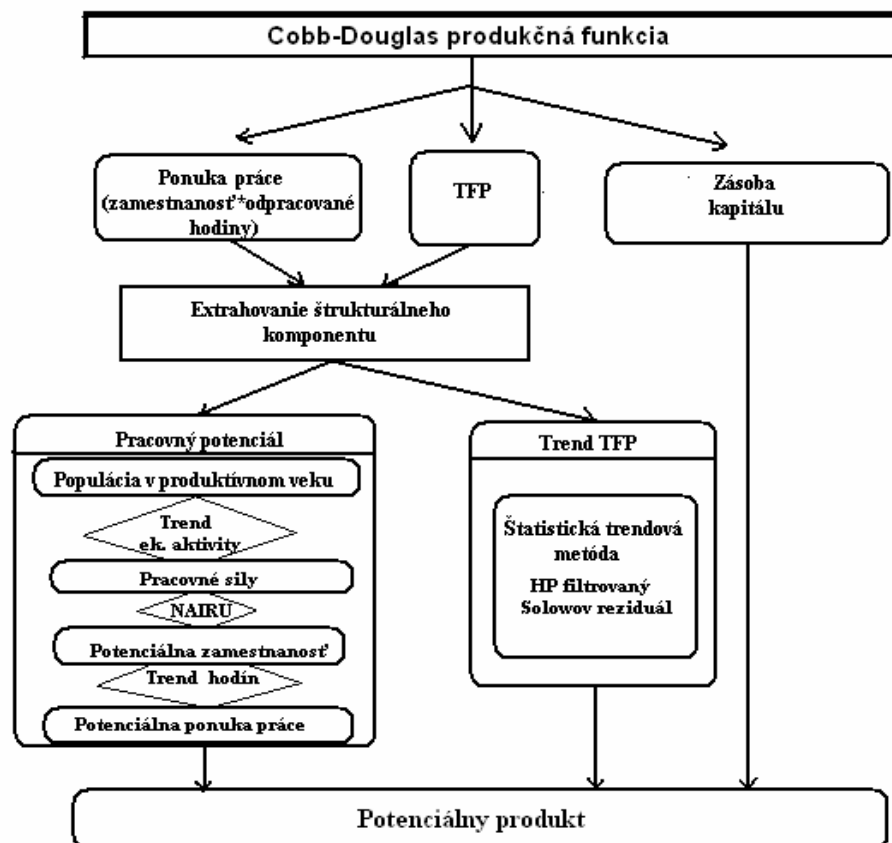
V súvislosti s metódou produkčnej funkcie niektorí ekonómovia (napr. [2]) upozorňujú, že „najväčším metodologickým trikom“ pri odhade potenciálneho produktu je kvantifikácia štrukturálnej zamestnanosti. Ale ako sme spomenuli už v úvode, v teórii, vo výskume a v empirických štúdiách existuje množstvo rôznych prístupov k všetkým uvedeným prvkom či modulom popísanej metodológie – napríklad metodológie filtrovania, merania zásoby kapitálu, merania a modelovania TFP, odhadu plnej alebo štrukturálnej zamestnanosti atď. Ďalšie strany tohto príspevku sa preto budú koncentrovať na jeden z uvedených prvkov – makroekonomické produkčné funkcie, ich teoretické základy, vlastnosti, a hlavne výber funkčnej formy produkčnej funkcie.

⁴ Predovšetkým v prácach a výskumoch podporovaných Eurostatom, resp. napríklad. aj v práci Klacek, Vošvrda, Schlosser [27].

⁵ Hájková a Hurník [19] napríklad nabádajú k modifikovanému výpočtu parametrov produkčnej funkcie spôsobom vedúcim k dynamizácii elasticít produkcie na vstupy.

Graf 1

Metodika EK na meranie potenciálneho produktu s využitím prístupu produkčnej funkcie



Prameň: [10].

2. Všeobecne o produkčných funkciách

Zovšeobecnene produkčná funkcia matematicky predstavuje funkciu medzi vstupmi a výstupmi výrobného procesu:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1)$$

kde

- Y – množstvo produkcie (produkt, výstup),
- X_1, X_2, \dots, X_n – množstvo vstupu faktorov ako kapitál, práca, základné suroviny, pôda, technický pokrok, riadenie.

Avšak produkcia je nielen matematickou funkciou (f) alebo transformáciou vstupov na výstup. Podľa štandardnej *mikroekonómie* – vychádzajúcej zo štandardného správania reprezentatívnej firmy⁶ – firma realizuje svoje produkčné rozhodnutie voľbou optimálneho množstva výstupu a vstupov. Toto rozhodnutie prijíma za predpokladu, že cena produkcie (P) a ceny vstupov (pX_i) sú determinované trhom,⁷ a to v kontexte jeho všeobecnej rovnováhy. Inými slovami, firma alebo výrobca sú *price-takers* (príjemcovia ceny) tak na strane vstupov, ako aj výstupu. Okrem toho mikroekonomická teória produkcie predpokladá, že tú istú úroveň výstupu možno dosiahnuť rôznymi kombináciami vstupov, resp. jeden vstup môže byť nahradený iným alebo ďalšími. V tomto prípade je možné nazerať na produkčné rozhodnutie firmy (o množstve vstupov a výstupe) ako na optimalizačný problém voľby množstva produkcie a množstva spravidla dvoch vstupov – vstupu práce a kapitálu.

Najčastejšie používanou formou vysvetlenia tohto optimalizačného procesu je grafické zobrazenie, kvôli lepšej interpretácii zobrazujúce dvojfaktorovú produkčnú funkciu (s faktorom práca L a kapitál K): $Y = f(K, L)$, a pri produkčných nákladoch C , kde: $C = i \cdot K + w \cdot L$. Rovnaké náklady pri rôznych vstupoch sú graficky zobrazované formou krivky izokosty C^* , pričom i je nominálna úroková sadzba a w sú nominálne mzdy (ceny vstupov pri trhovej rovnováhe).

Takzvané technologické optimum, ktoré firma dosahuje v produkčnom procese, je dané podmienkou, že firma produkuje hladinu výstupu $Y^* = f(K, L)$ pri minimálnych nákladoch, daných výrazom $C^* = i \cdot K + w \cdot L$ (graficky interpretované bodom priesečníku izokvanta a izokosty s priamkou L/K). V prípade, že firma má ohraničenie (či už na strane dopytu po produkcii alebo na strane nákladov), svoje optimum môže dosiahnuť hľadaním hladiny výstupu pri danom nákladovom obmedzení vstupov, a to buď formou maximalizácie (prispôsobenia) produkcie, alebo nájdením množstva vstupov pre danú hladinu produkcie, t. j. minimalizáciou (prispôobením) nákladov.

Iný spôsob vysvetlenia produkčného problému firmy je transformácia produkčného rozhodnutia do optimalizačnej úlohy.

V rozhodovacej situácii minimalizácie nákladov je cieľom firmy nájsť minimum nákladov $C = \sum pX_i \cdot X_i$ pri danom ohraničení $Y^* = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Pri maximalizácii výstupu je zase cieľom firmy nájsť maximum pre $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, a to pri danom rozpočtovom obmedzení $C^* = \sum pX_i \cdot X_i$. Z pohľadu optimalizácie ide o duálny rozhodovací problém. V prvom prípade sú náklady cieľom, alebo optimalizačným riešením a výstup je ohraničenie, v druhom prípade je množstvo výstupu cieľom alebo riešením a náklady sú ohraničenie.

⁶ Detailnejšia definícia reprezentatívnej firmy sa uvádza napríklad v [12, s. 38].

⁷ Zvyčajne je táto podmienka vyjadrená výrazom *paretovská firma* s cieľom jej odlíšenia od iného typu správania firmy, napríklad v zmysle Walrasovho a Marschallovho teoretického prístupu.

Za predpokladu, že firma nie je obmedzená ani na strane nákladov, ani na strane výstupu, optimálne rozhodnutie firmy o množstve vstupov a výstupu môže byť matematicky formalizované procesom maximalizácie zisku firmy (n), napríklad (pozri napr. [12]). Pri voľbe technológie, pri exogénnych cenách produkcie (produkovanej firmou) a exogénnych cenách vstupov je cieľom firmy nájsť najvhodnejšie množstvá výstupu a vstupov – pri maximalizácii hladiny zisku. Plánovaný zisk firmy tak možno vyjadriť ako:

$$\Pi = P \cdot Y^s - i \cdot B^s - w \cdot L^d \quad (4)$$

kde

- Y^s – plánovaná ponuka komodít firmy,
- P – trhovú cenu komodít,
- $P \cdot Y^s$ – príjem firmy,
- B^s – plánovaný dlh firmy, resp. zásoba bondov emitovaných firmou na financovanie investícií firmy ku koncu obdobia,
- $i \cdot B^s$ – kapitálové náklady,
- L^d – plánovaný dopyt firmy po práci,
- $w \cdot L^d$ – náklady práce.

Pri financovaní firemných investícií emisiou bondov a pri kapitálovej zásobe vyjadrenej nominálne [12, s. 39 – 40] je kapitálová zásoba (Kn) transformáciou:

$$Kn = Bo + P(K - Ko) \quad (5)$$

kde

- Bo – novo emitované bondy na nové investície v bežnom období,
- Ko, K – kapitálová zásoba v reálnom vyjadrení na začiatku, resp. konci bežného obdobia.

Substitúciou (5) do (4) je maximalizácia zisku firmy daná výrazom:

$$\Pi = P \cdot f(K, L) - w \cdot L - (Bo + P(K - Ko)) \quad (6)$$

Potom matematická podmienka maximalizácie zisku firmy je definovaná dvoma podmienkami (odvođenými z výrazu (6)):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = P \cdot \frac{\partial f}{\partial L} - w = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = P \cdot \frac{\partial f}{\partial K} - i \cdot P = 0 \quad (8)$$

alebo

$$P \cdot \frac{\partial f}{\partial L} = w \quad \frac{\partial f}{\partial K} = i \quad (9)$$

kde

- $\partial f / \partial L, \partial f / \partial K$ – hraničné fyzické produktivity vstupov,
- $P \cdot \partial f / \partial L, \partial f / \partial K$ – hraničnými produktivitami vstupov v hodnotovom vyjadrení.

Ekonomická interpretácia podmienky maximalizácie zisku firmy alebo optimálneho množstva výstupu a vstupov je teraz relatívne jednoduchá: firma zvyšuje dopyt po množstvách vstupov (dL^d , dK^d) a zvyšuje ponuku komodít len v prípade, ak hraničný príjem pri raste vstupov prekračuje hraničné náklady vstupov. Firma celkovo zvyšuje dopyt po vstupoch, ak:

$$P \cdot \frac{\partial f}{\partial L} \cdot dL^d > w dL^d \quad \partial f \quad (10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial K} \cdot dK^d > i dK^d \quad (11)$$

Prečo tak veľa a relatívne známych skutočností o optimálnom rozhodovaní firmy? Odpoveď je jednoduchá – teória produkčných funkcií totiž predpokladá takéto (už popísané) správanie firmy. Inými slovami, len matematická funkcia, ktorá implicitne reflektuje optimálny rozhodovací problém firmy, sa môže nazvať produkčnou funkciou. Ako totiž uvádza napríklad Brown [6], „technika maximalizácie sa rieši mimo produkčnej funkcie“, alebo optimálne rozhodovanie firmy možno považovať za nutnú podmienku v teórii a aplikácii produkčných funkcií. Každý *odklon* od takéhoto správania firmy/firiem v reálnej ekonomike (a aj každý odklon od rovnovážneho stavu ekonomiky) *môže totiž rezultovať do skreslenia výsledkov empirických odhadov pri použití modelov produkčných funkcií*.

Aj v *makroekonómii* je produkčná funkcia definovaná obdobne ako v mikroekonomickej definícii. Na účely tohto príspevku použijeme definíciu produkčnej funkcie OECD [35]. Podľa OECD je „produkčná funkcia maximálne stanovenie výstupu/výstupov, ktoré môžu byť vyprodukované pri stanovených vstupoch. Použitie produkčnej funkcie implikuje technologickú efektívnosť. Synonymom pre produkčnú hranicu je technologická efektívnosť možného stanovenia produkcie, a to zo všetkých možných kombinácií vstupov a výstupu, ktoré sú možné (ale nie nevyhnutne efektívne)“. V iných definíciách napríklad Hall, Taylor [20] spájajú produkčnú funkciu s pojmom *technológia*, teda „aké množstvo výstupu môže byť vyprodukované kapitálom a prácou použitými v produkcii“.

V makroekonómii je buď nepravdepodobné (na rozdiel od mikroekonómie), alebo nemožné predstaviť si všetky technologicky možné kombinácie výstupu a vstupov. Optimálne rozhodnutie o produkcii je totiž realizované veľkým množstvom firiem. Ďalším rozdielom je, že makroekonomická teória produkčných funkcií súčasne predpokladá trhové formovanie rovnováhy a rovnovážnych cien na všetkých trhoch výstupov a vstupov. Finálny výsledok týchto teoretických predpokladov je, že vo fungujúcej trhovej ekonomike s perfektne kompetitívnymi trhmi má agregovaný výstup sklón tendovať k jeho potenciálu a ekonomika k stavu rovnováhy. Za tejto situácie by sa zároveň ceny vstupov, resp. faktorov (pX_i) mali rovnať hodnote hraničnej produktivity vstupov [12, s. 74]:

$$pX_i = P \cdot \frac{\sigma f(X_1, X_2 \dots X_n)}{\sigma X_i} \quad (12)$$

Druhým spôsobom, ako skonštruovať, resp. vysvetliť agregovanú makroekonomickú produkčnú funkciu, je tzv. mikroekonomické zdôvodnenie makroekonomickej produkčnej funkcie alebo agregácia mikroekonomických produkčných funkcií do jedinej agregovanej produkčnej funkcie. Tento prístup predpokladá existenciu tzv. konzistentnej agregácie, t. j. špecifických technologických štruktúr, ktoré sú invariantné z pohľadu agregácie cez komodity alebo jednotky. Tento problém sa považuje za kritický, špeciálne pri zovšeobecnení produkčného procesu určitého sektora, resp. produkčného procesu na makroekonomickej úrovni.

Napriek naznačeným obmedzeniam, možným skresleniam, limitom či kritike používania makroekonomických produkčných funkcií, tento nástroj bol mnoho desaťročí, je a zrejme aj zostane hlavným metodologickým nástrojom používaným či už v teórii alebo v empirických výskumoch a štúdiách, v ekonómii na ponukovej strane, pri modelovaní ekonomického rastu a produkčnej medzery.

3. Hlavné charakteristiky a typy substitučných produkčných funkcií

Za najvýznamnejšie charakteristiky ďalej uvedených dvojfaktorových produkčných funkcií⁸ sa považujú *efektívnosť technológie a technický pokrok, výnosy z rozsahu výroby, elasticita výstupu na vstupy, substitúcia medzi vstupmi*. Všetky tieto charakteristiky sú dôležité na hodnotenie hlavne komparatívne statických vlastností jednotlivých typov produkčných funkcií.

Efektívnosť technológie vyjadruje vzťah medzi agregovaným množstvom vstupov a výstupom. Pri vyššej efektívnosti agregované množstvo vstupov vedie k vyššej úrovni výstupu a korešponduje s úrovňou technického pokroku (*TP*) v produkčnom procese alebo s tzv. celkovou (totálnou) produktivitou faktorov (*TFP*). Rast *TFP* (*gTFP*) je často spájaný s pojmom *Solowov reziduál* [44] a možno ho všeobecne vyjadriť ako:

$$Y = TFP \cdot f'(X_1, X_2) \quad (13)$$

alebo v rastovom vyjadrení a po úpravách ako:

$$gTFP = gY - \sum_i w_i \cdot gX_i \quad (14)$$

⁸ Odtiaľto príspevok abstrahuje od ostatných výrobných faktorov, ako sú energia, materiál atď. Príčinou je aj fakt, že väčšina prístupov aplikovaných pri odhade potenciálneho produktu vychádza z dvojfaktorového modelu produkcie.

kde

- gY – rast výstupu,
- $gTFP$ – rast výstupu vyvolaný technickým pokrokom (Solowov reziduál),
- gX_i – rast vstupu X_i ,
- w_i – váha faktora, elasticita výstupu na vstup i .

Výnosy z rozsahu výroby odrážajú všetky efekty dosiahnuté v produkčnom procese, a to v dôsledku koncentrácie, špecializácie a akumulácie výroby. Výnosy z rozsahu výroby vyjadrujú, koľkokrát vzrastie výstup v prípade, keď všetky vstupy vzrastú práve λ -krát:

$$f(\lambda X_1, \lambda X_2) = \lambda^n f(X_1, X_2) \quad (15)$$

V prípade $n = 1$ sa produkčný proces realizuje pri tzv. konštantných výnosoch z rozsahu výroby, pri $n < 1$ výnosy rastú a pri $n > 1$ sú výnosy z rozsahu klesajúce.

Elasticita výstupu na vstup i (ηX_i) vyjadruje vplyv jednopercentného rastu vstupu X_i na výstup Y (v %):

$$\eta X_i = \frac{\partial Y}{\partial X_i} \cdot \frac{X_i}{Y} \approx \frac{\Delta Y}{Y} \cdot \frac{\Delta X_i}{X_i} \quad (16)$$

Táto charakteristika sa často využíva pri separácii vplyvu individuálnych vstupov/faktorov na výstup, alebo v analýzach ekonomického rastu.

Možnosť substitúcie medzi faktormi v produkčnom procese zahŕňa dva predpoklady, resp. vlastnosti substitučných produkčných funkcií. Prvý predpoklad vyjadruje fakt, že ak spotreba vstupu X_i rastie, tak výstup rastie tiež. Ale v prípade, ak ostatné vstupy zostávajú nemenné, každý ďalší nárast vstupu X_i je spojený s nižším dodatočným prírastkom výstupu.

Tieto dva predpoklady možno matematicky vyjadriť nasledovne:

$$\frac{\partial f'}{\partial X_i} > 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f'}{\partial X_i^2} < 0 \quad (17)$$

Substitúcia medzi vstupmi je pravdepodobne najdôležitejšia vlastnosť jednotlivých typov produkčných funkcií. Zobrazuje možnosť, resp. pružnosť substitúcie vstupov vzájomne, resp. schopnosť vzájomnej substitúcie spravidla limitujúceho vstupu iným. Dve charakteristiky – *hraničná miera substitúcie* a *elasticita substitúcie* – sa spravidla využívajú na posúdenie alebo meranie pružnosti substitúcie medzi vstupmi v produkčných funkciách (PF). Na druhej strane, predpoklad o charaktere substitučného procesu pri konkrétnych funkčných formách (FF) PF môže viesť k vývinu rôznych modelov PF.

Hraničná miera technologickej substitúcie $R_{K,L}$ medzi vstupmi vyjadruje, aké množstvo vstupu K (napr. nárast) je potrebné na udržanie tej istej hladiny výstupu, ak sa mení množstvo vstupu L (pokles). Pri vyjadrení totálneho diferenciálu ΔY ako:

$$\Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial X_K} \cdot \Delta X_K + \frac{\partial Y}{\partial X_L} \cdot \Delta X_L \quad (18)$$

a v prípade keď $\Delta Y = 0$, hraničná miera substitúcie môže byť po úpravách (18) vyjadrená ako:

$$R_{K,L} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial X_K}}{\frac{\partial Y}{\partial X_L}} \approx - \frac{\Delta X_L}{\Delta X_K} \quad (19)$$

Elasticitu substitúcie σ medzi dvoma vstupmi na posúdenie stupňa nahraditeľnosti medzi ľubovoľným párom faktorov nezávisle vyvinuli Hicks [22] a Robinson [39]. *Elasticita substitúcie* meria percentuálnu zmenu v proporcii faktorov k zmene hraničnej miery technologickej substitúcie, alebo je „meradlom, ako jednoducho možno meniaci sa faktor nahradiť iným“ [22]. *Indikátor elasticity substitúcie* (σ) vyjadruje (v %) reakciu zmeny v podiele faktorov na zmenu v hraničnej miere substitúcie:

$$\sigma = \frac{\frac{d(X_L / X_K)}{X_L / X_K}}{\frac{dR_{K,L}}{R_{K,L}}} \quad (20)$$

4. Kritériá na výber „najlepšej“ funkčnej formy produkčnej funkcie

Pri konštrukcii alebo pri výbere najvhodnejšej funkčnej formy (FF) produkčnej funkcie (PF) Fuss, McFadden a Mundlak [15] definovali podmienku, podľa ktorej, „okrem zvyčajného kritéria, že funkčná forma má zodpovedať cieľom analýzy“, kľúčovým prvkom je aj udržateľnosť platnosti hypotézy, ktorá „sa predpokladá ako pravdivá“. Vo vzťahu k modelovaniu produkčnej funkcie je špeciálne dôležité korektné definovať „základnú axiómu o podstate technológie“, predpoklady o technologických charakteristikách a správaní modelovaného produkčného procesu.⁹

V rámci udržania platnosti hypotézy títo autori odporúčali uplatniť štyri kritériá na výber konkrétnej matematickej FF: úspornosť parametrov, jednoduchosť interpretácie, výpočtovú jednoduchosť, interpolačnú a extrapoláčnú robustnosť.

⁹ Z pohľadu ekonometrie všeobecne výber modelu produkčnej funkcie možno považovať za súčasť fázy konštrukcie modelu. Pozri napríklad [45; 17; 18; 7; 21].

Prvé kritérium *úspornosť parametrov* citovaní autori chápali tak, „že FF PF nemá obsahovať viac parametrov, ako je potrebných na dosiahnutie konzistencie a udržanie platnosti hypotézy“. Príčinou pridriavania sa tohto kritéria alebo princípu je, že prekročovanie takto odporúčaného počtu parametrov môže viesť k niektorým štatistickým alebo ekonometrickým komplikáciám. Na druhej strane, úspornosť počtu parametrov môže byť v súlade s prijatou hypotézou, ale nemusí reflektovať všetky technologické zmeny v reálnom – modelovanom produkčnom procese a jeho charakteristiky.

Výber komplikovanejších matematických FF produkčnej funkcie vedie spravidla k potrebe ďalších dodatočných výpočtov hlavných charakteristík PF (ako napr. hraničnej miery substitúcie, hraničných produktív faktorov, elasticity výstupu na vstupy atď.). V protiklade s uvedeným sú v relatívne jednoduchších FF produkčnej funkcie jej parametre často identické s hlavnými charakteristikami tejto funkcie. Sú jednoduchšie tak na *interpretáciu, ako aj testovanie, odhad modelu* a jeho porovnanie s prijatou hypotézou.

Kritérium *výpočtovej jednoduchosti* je spojené s faktom, že komplikovanejšie FF produkčnej funkcie môžu vyžadovať použitie komplikovanejších a pokročilejších ekonometrických metód pri odhade modelu (ako napr. nelineárne metódy odhadu parametrov, metódy na odstraňovanie multikolinearity atď.). Dá sa však zrejme akceptovať, že v súčasnom období rozvoja informačných technológií, ekonometrie a ekonometrických softvérov nemusí toto kritérium byť také významné a použitie zložitejších FF produkčnej funkcie môže byť zjednodušené s využitím existujúceho užívateľsky orientovaného softvéru.

Interpolačná a extrapolačná robustnosť znamená predovšetkým „v rámci a mimo pozorovaných dát, že vybraná FF by sa mala dobre správať, mala by konzistentne zobrazovať prijatú hypotézu“. Inými slovami, FF produkčnej funkcie by mala byť schopná reálne a konzistentne reflektovať produkčný proces tak v analyzovanom, ako aj prognózovanom období. V čase dynamických štruktúrnych zmien v modelovanej ekonomike je toto kritérium pravdepodobne najdôležitejším kritériom na výber „správnej“ FF a možno ho považovať za kritérium *primeranej flexibility*. Týmto pojmom treba rozumieť schopnosť zvoleného modelu FF produkčnej funkcie *primerane a pružne reflektovať všetky zmeny (vrátane technologických)*, ktoré prebiehajú v modelovanej ekonomike.

5. Výber konkrétnej produkčnej funkcie

Skôr ako prikróčime k formulácii stanoviska alebo k odporúčaniam výberu konkrétnej FF produkčnej funkcie, javí sa nám účelné uviesť niekoľko doplňujúcich poznámok ku kritériu *interpolačnej a extrapolačnej robustnosti alebo kritériu primeranej pružnosti výberu PF*. Ako sme už indikovali, je potrebné zohľadňovať,

či konkrétna ekonomika (modelovaná s využitím PF) je vo fáze relatívne stabilného vývoja, alebo vo fáze významných zmien v produktivite výrobných faktorov, v celkovej produktivite faktorov, v zmenách cien faktorov a technológii. Pretože nie všetky FF PF sú schopné reflektovať všetky uvedené dynamické zmeny v produkčnom procese a pretože daná FF už predurčuje charakteristiky PF (16) – (21), je veľmi dôležité vopred prihliadať na konkrétne vlastnosti (charakteristiky) každej PF. Špeciálne na charakteristiku: a) *elasticity výstupu na vstupy (EOI) alebo hraničnej produktivity faktorov*, b) *elasticity substitúcie (ES)*.

V rámci nasledujúceho porovnania uvedených charakteristík na konkrétne PF použijeme tri najviac reprezentatívne modely PF s konštantou (CES) a variabilnou (VES) elasticitou substitúcie, ktoré sú pre zjednodušenie redukované na podmienku konštantných výnosov z rozsahu výroby a pre faktory kapitál – K a práca – L .

a) *Cobb-Douglasova (CD) PF*:¹⁰

$$Y = TFP \cdot (K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}) \quad (22)$$

b) *PF s konštantnou elasticitou substitúcie CES*:¹¹

$$Y = TFP \cdot (\rho K^{-\alpha} + (1 - \rho)L^{-\alpha})^{-1/\alpha} \quad (23)$$

c) *PF s variabilnou elasticitou substitúcie (VES)* reprezentuje jej najviac zovšeobecnený model v podobe transcendentálnej logaritmickej PF (TRL), resp. *Translog PF*, t. j. FF bez apriórneho predpokladu o konkrétnom tvare (FF) modelu VES PF:¹²

$$\ln Y = TFP' + \alpha_K \cdot \ln K + \alpha_L \cdot \ln L + \gamma_{KL} \cdot \ln K \cdot \ln L + 0.5 \cdot \gamma_{KK} \cdot (\ln K)^2 + 0.5 \cdot \gamma_{LL} \cdot (\ln L)^2 \quad (24)$$

kde TFP' vyjadruje všeobecnú formu celkovej produktivity faktorov TFP .

Tabuľka 1 obsahuje analytické vyjadrenie EOI a ES pre jednotlivé modely PF: CD, CES and TRL a ich statické, resp. variabilné vlastnosti.

Komparácia ukazuje, že CD PF je FF s najviac obmedzenými vlastnosťami/predpokladmi v oboch charakteristikách – *konštantnosť v EOI, ako aj ES*. Vlastnosť interpolačnej a extrapoláčnej robustnosti alebo primeranej flexibility možno teda pri CD FF hodnotiť ako relatívne nízku, resp. takýto model PF môže byť preferovaný v ekonomikách prechádzajúcich fázou nie príliš významných zmien v produkčnom procese. Na druhej strane, priame vyjadrenie EOI pre kapitál a prácu hodnotami parametrov α , resp. $1 - \alpha$ a ďalej potvrdenia/testy platnosti

¹⁰ Zavedená v literatúre prácou [8].

¹¹ Zavedená autormi v práci [4].

¹² Zavedená autormi v práci [24] ako Taylorova aproximácia 2. rádu vopred nepredurčeného tvaru funkčnej formy produkčnej funkcie.

marginalistickej teórie, resp. „zákona produkcie“ [11; 14], podľa ktorých parametre α , resp. $1 - \alpha$ možno v stave rovnováhy stotožniť s podielom hraničných produktov, resp. empiricky s váhou nominálneho podielu faktorov na pridanej hodnote (pozri [10], resp. [16]), zvyšujú atraktivnosť použitia FF CD PF. Zároveň tieto vlastnosti umožňujú prekonať potenciálne komplikácie pri odhade parametrov PF ekonometrickým spôsobom [13], zvyšujú transparentnosť a porovnateľnosť odhadu produkčnej medzery v medzinárodnom porovnaní [10].

T a b u ľ k a 1

Analytické vyjadrenie EOI a ES pre CD, CES a TRL PF

| PF | EOI ($\eta K, \eta L$) | ES (σ) |
|-----|---|--|
| C-D | $\alpha, 1 - \alpha$ (Konštanta) | $\sigma = 1$ (Konštanta) |
| CES | $\frac{\rho K^{-\alpha}}{(\rho K^{-\alpha} + (1 - \rho)L^{-\alpha})}, \frac{(1 - \rho)L^{-\alpha}}{(\rho K^{-\alpha} + (1 - \rho)L^{-\alpha})}$ (Variabilná) | $\sigma = \frac{1}{1 - \alpha}$ (Konštanta) |
| TRL | $\alpha_K + \gamma_{KK} \cdot \ln K + \gamma_{KL} \cdot \ln L, \alpha_L + \gamma_{LL} \cdot \ln L + \gamma_{KL} \cdot \ln K$ (Variabilná) | $\sigma = \sigma^{*13}$ (Variabilná) |

Prameň: Autor.

V protiklade k CD PF nie sú charakteristiky CES a TRL PF tak obmedzené svojimi FF. Cez variabilitu (zároveň aj hypoteticky možnú konštantnosť¹⁴) elasticity substitučného procesu a hraničných produktív faktorov, PF typu TRL je lepšie schopná reflektovať produkčné procesy v ekonomike, ktorá prechádza procesom dynamických zmien. Platnosť kritéria *primeranosť flexibility* tak možno v TRL PF považovať za vysokú.

T a b u ľ k a 2

Finálne ohodnotenie kritérií na výber jednotlivých typov produkčnej funkcie

| Kritérium | Typ FF PF | | |
|--|-----------|---------|--------|
| | C-D | CES | TRL |
| Úspornosť parametrov | vysoká | stredná | nízka |
| Jednoduchosť parametrov | vysoká | stredná | nízka |
| Jednoduchosť výpočtu | vysoká | stredná | nízka |
| Interpoláčna a extrapoláčna robustnosť | nízka | stredná | vysoká |

Prameň: Autor.

¹³ Pri empirickom testovaní TRL PF sa spravidla používa prístup Allena (Allenovej elasticity) na meranie elasticity substitúcie – pozri napríklad Allen [1]. Pri dvojfaktorovom prístupe to vedie k identickým hodnotám. Všeobecne platí, že $\sigma_{ij}^* = ((\sum_k f_k \cdot X_k \cdot |B_{ij}|) / (X_i \cdot X_j \cdot |B|))$, kde f_k – prvá parciálna derivácia PF (podľa faktora k), $|B|$ je determinant vrúbenej Hessianovej matice a $|B_{ij}|$ je tzv. kofaktor k i, j . alebo subdeterminant matice $|B|$.

¹⁴ Napríklad v prípade hodnôt parametrov TRL PF $\gamma_{KL}, \gamma_{KK}, \gamma_{LL} = 0$, čo redukuje TRL PF na FF typu CD PF.

Na základe predchádzajúceho vysvetlenia a aplikácie Fussových, McFaddenových a Mundlakových kritérií pre PF CD, CES a TRL, tabuľka 2 zobrazuje finálne ohodnotenie výberu konkrétnej PF (na báze ich vlastností).

Záver

Cobbova-Douglasova produkčná funkcia je s určitosťou *najviac používaným modelom PF* vo svete, v krajinách EÚ pri odhade potenciálneho produktu a produkčnej medzery. Tabuľka 2 ukazuje, že CD PF je hodnotená najvyššie pri troch prvých kritériách. Ale nielen toto hodnotenie vlastností CD PF je príčinou popularity tohto modelu. Viaceré empirické výsledky demonštrujú, že napríklad hodnota elasticity substitúcie rovná jednej nemusí byť považovaná za výrazné obmedzenie CD PF. Empirické odhady elasticity substitúcie blízke hodnote jedna pri použití CES PF tiež podporujú rozhodnutie v prospech použitia relatívne jednoduchšej PF typu CD. Ďalšou „komparatívnou“ výhodou CD PF v porovnaní s CES je možnosť použitia jednoduchších metód odhadu parametrov než pri ďalších dvoch PF. Na druhej strane, viac všeobecná CES PF – bez obmedzenia tak na strane hodnoty elasticity substitúcie, ako aj na strane hodnôt elasticít výstupu na vstupy – je veľkou prednosťou CES modelu PF. Použitie nelineárnych metód odhadu parametrov (napr. [5; 32]) sa, naopak, často uvádza ako nevýhoda CES PF (napr. v porovnaní s CD PF).

Nie príliš jednoduchá interpretácia a výpočet parametrov TRL PF sa považuje spravidla za nevýhodu tohto typu PF. Hlavnou možnosťou multikolinearity medzi faktormi, a tým potreba použitia komplikovanejších metód odhadu parametrov [9; 37] je označovaná za veľkú nevýhodu pri empirických aplikáciách tohto modelu. Ale vlastnosti TRL PF (variabilná elasticita substitúcie, variabilné hodnoty elasticity výstupov na vstupy, nie a priori predurčený model a vlastnosti TRL PF) predeterminujú TRL PF za najvšeobecnejší model PF. Tým, že TRL PF a priori nedefinuje hypotézu o charaktere produkčného procesu, je táto PF schopná reflektovať tak reálne produkčné procesy v dynamicky sa vyvíjajúcich ekonomikách s výraznými technologickými zmenami, ako aj v ekonomikách s relatívne stabilným vývojom.

V empirickom výskume neexistuje síce také veľké množstvo príspevkov a aplikácií TRL PF ako k CD a CES PF.¹⁴ Napriek tomu a vzhľadom na uvedené argumenty chceme v príspevku stimulovať pokračovanie vo výskume a v aplikácii TRL PF,¹⁵ prípadne aspoň v modifikácii prístupu založenom na meraní produkčnej medzery s využitím CD PF. K modifikáciám nabádajú totiž aj ďalšie práce autorov zo SR a z ČR [16; 19]. Uvedení autori obdobne ako dôvod uvádzajú prílišnú striktnosť predpokladu konštantnosti hodnôt faktorových podielov na pridanej hodnote v čase, t. j. konštantnosť elasticít výstupu na vstupy v čase v PF CD.

Toto upozornenie sa týka hlavne aplikácie CD produkčnej funkcie na popísanie produkčných procesov prebiehajúcich v Slovenskej republike, Českej republike, resp. v nových členských štátoch EÚ.¹⁵¹⁶

Literatúra

- [1] ALLEN, R. G. D.: *Mathematical Analysis for Economists*. London: Macmillan 1938.
- [2] ANDERSEN, A. B.: *Cyclically Adjusted Government Budget Balances*. *Monetary Review*, 3rd Quarter 2002. Copenhagen: Denmark Nationalbank.
- [3] ANTRAS, P.: *Is the U.S. Aggregate Production Function Cobb-Douglas? New Estimates of the Elasticity of Substitution Contributions to Macroeconomics*, 4, 2004, č. 1.
- [4] ARROW, K. J. – CHENERY, H. B. – MINHAS, B. S. – SOLOW, R. M.: *Capital-labor Substitution and Economic Efficiency*. *Review of Economics and Statistics*, 43, 1961, č. 3.
- [5] BARDET, Y.: *Non Linear Parameter Estimation*. London: Academic Press 1974.
- [6] BROWN, M.: *On the Theory and Measurement of Technological Change*. Cambridge, UK: Cambridge University Press 1966.
- [7] BROOKS, Ch.: *Introductory Econometrics for Finance*. Cambridge, UK: Cambridge University Press 2002.
- [8] COBB, CH. W. – DOUGLAS, P. H.: *A Theory of Production*. *American Economic Review*, 18, 1928, March.
- [9] CONDÍK, Š.: *Počítačové simulácie s metódami na elimináciu multikolinearity*. *Informačné systémy*, 1980, č. 6.
- [10] DENIS, C. – GRENOUILLEAU, D. – Mc MORROW, K. – RÖGER, W.: *Calculating Potential Growth Rates and Output Gaps – A Revised Production Function Approach*. [Economic Papers, No. 247.] Brussels: European Commission, March 2006.
- [11] DOUGLAS, P.: *Are There Laws of Production?* *American Economic Review*, XXXVIII, 1948, March.
- [12] FELDERER, B. – HOMBURG, S.: *Macroeconomics and New Macroeconomics*. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer Verlag 1992.
- [13] FELIPE, J. – HASAN, R. – MCCOMBIE, J. S. L.: *Correcting for Biased when Estimating Production Functions: An Illusion of the Laws of Algebra ?* [CAMA Working Paper Series, November.] Canberra. The Australian National University 2004.
- [14] FRASER, I.: *The Cobb-Douglas Production Function: An Antipodean Defence?* *Economic Issues*, 7, Part 1, March 2002. Ames, IA: Iowa State University.
- [15] FUSS, M. – MCFADDEN, D. – MUNDLAK, Y.: *Functional Forms in Production Theory*. In: FUSS, M. and MCFADDEN, D.: *The Theory of Production*. Vol. 1. Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1978.
- [16] GALABOVÁ, M. – KUCZEROVÁ, J. – VALACHY, J. – ÓDOR, E. – KRAJČÍR, Z.: *Odhad produkčnej medzery a štrukturálneho salda verejných financií*. *Ekonomická analýza*, č. 3. Bratislava: MF SR, Inštitút finančnej politiky 2005.
- [17] GARAJ, V. – ŠUJAN, V.: *Ekonometria*. Bratislava: Alfa 1980.
- [18] GOURIEROUX, CH. – JASIAK, J.: *Financial Econometrics*. Princeton, NJ: Princeton University Press 2001. ISBN 0-691-08872-1.
- [19] HÁJKOVÁ, D. – HURNÍK, J.: *Cobb-Douglas Production Function: The Case of a Converging Economy*. *Finance a úvěr*, 57, 2007, č. 9 – 10.

¹⁵ V Slovenskej republike na báze poznatkov autora boli realizované len dva odhady TRL a jedna CES [36; 37].

¹⁶ Napríklad v súlade s výskumami rozvíjanými Eurostatom a Českým štatistickým úradom.

-
- [20] HALL, R. E. – TAYLOR, J. B.: *Macroeconomics*. New York: W.-W. Norton and Co. 1988.
- [21] HATRÁK, M.: *Ekonometria*. Bratislava: Iura Edition 2007. ISBN 978-80-8078-150-7.
- [22] HICKS, J.: *Theory of Wages*. London: Macmillan 1932.
- [23] HODRICK, R. J. – PRESCOTT, E. C.: *Post-war U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation*. [Discussion paper 451.] Pitsburg: Caregie-Mellon University 1980.
- [24] CHRISTENSEN, L. J. – JORGENSEN, O. W. – LAU, L.: *Conjugate Duality and the Transcendental Logarithmic Production Function*. *Econometrica*, 39, 1971, č. 4.
- [25] KLACEK, J. – NEŠPOROVÁ, A.: *Separabilita produkční funkce a její testování*. *Ekonomicko-matematický obzor*, 1982, č. 1.
- [26] KLACEK, J. – NEŠPOROVÁ, A.: *Produkční funkce a modelování ekonomického rustu v CSSR*. Praha: Academia 1983.
- [27] KLACEK, J. – VOŠVRDA M. – SCHLOSSER, Š.: *KLE Translog Production Function and Total Factor Productivity*. *Štatistika*, 2007, č. 4.
- [28] KOTULAN, A.: *Produkční funkce*. *Politická ekonomie*, XXVIII, 1980, č. 10.
- [29] KOTULAN, A.: *Modelování substitučních procesu I*. *Politická ekonomie*, XXX, 1981, č. 3.
- [30] KOTULAN, A.: *Modelování substitučních procesu II*. *Politická ekonomie*, XXX, 1981, č. 4.
- [31] LIVEREMORE, S.: *An Econometric Model of the Slovak Republic*. <www.finance.gov.sk/ifp>.
- [32] LAŠČIAK, A. – OCHOTNICKÝ, P.: *Economic Growth in the Slovak Economy in 1950 – 1985*. [VIIth International Congress of Cybernetics and Systems.] London 1987.
- [33] McFADDEN, D.: *Constant Elasticity of Substitution Production Functions*. *Review of Economic Studies*, 1963, April.
- [34] McFADDEN, D.: *Cost, Revenue and Profit Functions: a cursory Review*. [NBER Working Paper 86.] Berkley: University of California 1966.
- [35] OECD *Productivity Manual: A Guide to the Measurement of Industry – Level and Aggregate Productivity Growth*. Annex 1 – Glossary. Paris: OECD 2001.
- [36] OCHOTNICKÝ, P.: *Meranie substitučných procesov v ekonomike SR pomocou transcendentálnej logaritmickej produkčnej funkcie*. *Informačné systémy*, 1987, č. 4.
- [37] OCHOTNICKÝ, P.: *Modelovanie vplyvu extenzívnych a intenzívnych faktorov na rast ekonomiky Slovenska*. [Dizertačná práca.] Bratislava: Vysoká škola ekonomická v Bratislave 1988.
- [38] REVANKAR, N. S.: *A Class of Variabilná Elasticity of Substitution Production Function*. *Econometrica*, 1971, č. 1.
- [39] ROBINSON, J.: *The Economics of Imperfect Competition*. London: Macmillan and Co. 1933.
- [40] ROEGER, W.: *The Production Function Approach to Calculating Potential Growth and Output Gaps Estimates for EU Member States and the US*. [Workshop on Perspectives on Potential Output and Productivity Growth.] Ottawa: Banque de France and Bank of Canada, 24. – 25. apríla 2006.
- [41] SHEPHARD, R. W.: *Cost and Production Functions*. Princeton, NJ: Princenton University Press 1953.
- [42] SHEPHARD, R. W.: *Theory of Cost and Production Functions*. Princenton, NJ: Princeton University Press 1970.
- [43] UZAWA, H.: *Production Function with Constant Elasticity of Substitution*. *Review of Economic Studies*, 1962, October.
- [44] SOLOW, R. M.: *Technical Change and the Aggregate Production Function* *Review of Economics and Statistics*, 39, 1957, č. 3.
- [45] ŠUJAN, I. – CONDÍK, Š.: *Metódy efektívneho odhadu parametrov v regresných modeloch s významnou multikolinearitou*. *Ekonomicko-matematický obzor*, 1980, č. 2.
- [46] WILLMAN, A.: *Euro Area Production Function and Potential Output: A Supply Side System Approach*. [ECB Working paper, No. 53.] Frankfort: ECB 2002.