

JOZEF KRCHO*

**MATEMATICKÉ VLASTNOSTI TOPOGRAFICKEJ PLOCHY GEORELIÉFU
Z HĽADISKA MORFOMETRICKEJ ANALÝZY A JEJ MODELOVANIE
POMOCOU KOMPLEXNÉHO DIGITÁLNEHO MODELU**

Jozef Krcho: Mathematical Properties of the Topographical Surface of Georelief from the Viewpoint of Morphometric Analysis As Well As Its Modelling by Means of a Complex Digital Model. Geogr. Čas., 39, 1987, 2; 14 figs, 21 refs.

The georelief as an objective and subject of study in various scientific disciplines. The real space of geographical sphere, the position of georelief within this sphere (in the landscape) and its influence on spatial differentiation of geocological processes. Morphometric parameters and geometric forms of the georelief; the definition of georelief. The georelief in an abstract and representing (cartographical) space and its mathematical properties. The scalar field of altitudes and its interpolation surface — the topographical surface of georelief. Modelling of georelief by means of the complex digital model of relief [KDMR].

**GEORELIÉF AKO OBJEKT A PREDMET ŠTÚDIA RÔZNYCH VEDNÝCH
DISCIPLÍN**

Georeliéf je predmetom záujmu mnohých geovedných i technických disciplín, vrátane urbanizmu, územného plánovania, ako aj územnoprojekčnej a stavebnej praxe. Je však dôležitým predmetom záujmu aj vojenskej vedy a vojenskej praxe vo všetkých jej oblastiach. Každá z uvedených vedných disciplín, ako aj územnoplánovacia, projekčná a vojenská prax si ho pritom všima zo svojho hľadiska, ktoré je dané tak jej predmetom a objektom štúdia, ako aj cieľom výslednej realizácie.

Je to preto, že georeliéf je jednak dôležitým diferenciacným faktorom geoeologických procesov v krajine a jednak intenzívne vplýva na ľudskú aktivitu v priestore.

Niektoré vedné disciplíny si pritom georeliéf všimajú samostatne, a niektoré si ho všimajú v rôzne širokých reláciách s ostatnými zložkami geografickej sféry. Georeliéf je vlastným predmetom štúdia geomorfológie ako samostatnej vednej disciplíny [16, 17], ktorá študuje povrchové tvary zemskej kôry ako

* Doc. RNDr. Jozef Krcho, CSc., Prírodovedecká fakulta UK, Katedra fyzickej geografie a kartografie, Mlynská dolina, 842 15 Bratislava.

výsledok reliéfotvorných procesov spôsobených interakciou endogénnych a exogénnych síl; študuje teda vzhľadom na tieto procesy a vlastnosti zemskej kôry ich genézu a dynamiku na všetkých taxonomických úrovniach.

Povrchové tvary zemskej kôry, už tým, že sú to tvary, majú svoju geometriu. Z nej sú potom matematicky odvodené morfometrické veličiny georeliéfu. Medzi geometrickými a genetickými formami georeliéfu existuje na všetkých ich úrovniach významný vzájomný vzťah, v dôsledku čoho sú morfometrické parametre georeliéfu dôležitými charakteristikami aj jeho genetických tvarov.

Z hľadiska zamerania tejto práce genetickými tvarmi georeliéfu sa nebudeme zaoberať. Poznamenajme iba, že tie sú v geomorfológii tiež charakterizované príslušnými ukazovateľmi, ktoré medzi iným charakterizujú potrebné vlastnosti všetkých tých príslušných častí zemskej kôry, ktoré sú z geomorfologického hľadiska na danej úrovni poznania reliéfotvorných procesov relevantné. Ich význam je podľa citovanej literatúry [2, 3] tým väčší, že v modernej geomorfológii sú pre vývoj georeliéfu ako prvoradé kladené endogénne procesy, zatiaľ čo procesom exogénnym sa prisudzuje úloha druhoradá — modifikačná.

Georeliéf pozostávajúci z povrchových tvarov zemskej kôry ako výslednice reliéfotvorných procesov je teda tvorený pevným ale zároveň dynamickým rozhraním litosféry, resp. pedosféry s biosférou na jednej strane a atmosféry, resp. hydrosféry na druhej strane. Toto rozhranie ako také možno vzhľadom na referenčnú plochu Zeme vyjadriť množinou priestorovo rozložených výšok v smere jej normál a na príslušnej rozlišovacej úrovni ponímať ako plochu určenú priestorovým rozložením výšok. Táto plocha má svoje geometrické vlastnosti a z nich vyplývajúce geometrické tvary. Priestorové rozloženie geometrických tvarov tejto plochy je v úzkom vzťahu s priestorovým rozložením jej genetických tvarov viazaných na reliéfotvorné procesy v litosfére ako jej hmotnom nositeľovi. Z teoreticko-metodického hľadiska je preto potrebné túto plochu ako nehmotnú veličinu odlišiť od jej hmotného nositeľa — litosféry, pritom ich však nemožno v realite navzájom od seba oddiľvať. Má to pre štúdium georeliéfu ako celku svoj význam, a to tak pri vytváraní pojmového a logického aparátu, ako aj pri formulácii kvantitatívnych veličín a ich triedení.

Ak by sa z teoreticko-metodického hľadiska takéto rozlíšenie georeliéfu ako plochy od jej hmotného nositeľa neučinilo, mohlo by to viesť k niektorým paradoxom. Napr. špecifická hmotnosť litosféry, t. j. hmotnosť jej ľubovoľne polohovo lokalizovanej objemovej jednotky (1 m^3) v jej povrchových častiach by mohla byť stotožnená so špecifickou hmotnosťou georeliéfu. To znamená, že bez takéhoto rozlíšenia by otázka, „Akú priemernú špecifickú hmotnosť má georeliéf v študovanej oblasti“ bola z hľadiska formulácie kvantitatívnych veličín georeliéfu a ich zatriedenia opodstatnená. Tak isto by bola opodstatnená otázka hrúbky georeliéfu v smere jeho normály v jeho ľubovoľnom bode. Sú to teda predovšetkým teoreticko-metodické dôvody, prečo je tento problém v literatúre traktovaný.

Ak teda analyzujeme ukazovatele georeliéfu podľa ich príslušnosti buď k zemskej kôre ako k jeho nositeľke, alebo k jej povrchu, ponímanému na určitej rozlišovacej úrovni ako plocha, potom ich z teoreticko-metodického hľadiska môžeme rozdeliť:

a) na ukazovatele charakterizujúce všetky tie vlastnosti zemskej kôry ako hmotného nositeľa georeliéfu, ktoré sú relevantné z hľadiska jeho genézy a dynamiky,

b) na ukazovatele charakterizujúce geometrické vlastnosti zemského povrchu ponímaného na určitej rozlišovacej úrovni ako plocha.

Z navodeného problému vyplýva napríklad aj spôsob vyjadrenia vplyvu georeliéfu na priestorovú diferenciáciu procesov v geografickej sfére prostredníctvom jeho jednotlivých ukazovateľov (používa sa aj výraz „prostredníctvom jeho jednotlivých zložiek“). Jednotlivé vedné disciplíny ho vyjadrujú rôzne široko. Tak napr. geomorfológovia a geomorfologicky orientovaní geografi vyjadrujú tento vplyv všetkými ukazovateľmi z oboch uvedených bodov, t. j. z bodu a), b). Takéto vyjadrenie môže však v zmysle už uvedeného viesť zo širšieho teoreticko-metodického hľadiska k niektorým nezrovnalostiam. Ukážme to na príklade vplyvu georeliéfu na priestorovú diferenciáciu príkonu slnečného žiarenia $\{Q_C\}_{d_i}$ na jednotku jeho plochy, napr. pre ľubovoľne zvolený deň d_i . Príkon $\{Q_C\}_{d_i}$ je určený vzťahom

$$\{Q_C\}_{d_i} = \int_{T_v}^{T_z} p^m (A \cos T + B \sin T + C) dT, \quad (1)$$

kde p je koeficient priepustnosti atmosféry, $0 < p < 1$,

$m = -R_m \sin h_\odot + \sqrt{R_m^2 \sin^2 h_\odot + 2R_m + 1}$, pričom $1 \leq m \leq 35,4$ pri uvažovanom zakrivení referenčnej plochy Zeme,

$A = \sin \gamma_N \cos A_N \sin \varphi \cos \delta_\odot + \cos \gamma_N \cos \varphi \cos \delta_\odot$; $B = -\sin \gamma_N \sin A_N \cos \varphi \sin h_\odot$, $C = \sin \gamma_N \cos A_N \cos \varphi \sin \delta_\odot + \cos \gamma_N \sin \varphi \sin \delta_\odot$,

T_v — čas východu zvolenej plošnej jednotky na reliéfe z tieňa do svetla (počiatok oslnenia), T_z — čas západu zvolenej plošnej jednotky na reliéfe zo svetla do tieňa (koniec oslnenia), pričom

$$T_{v,z} = \arccos \left(\frac{-AC \pm \sqrt{A^2 C^2 - (A^2 + B^2)(C^2 - B^2)}}{A^2 + B^2} \right) \quad (2)$$

γ_N — sklon reliéfu v danej plošnej jednotke v smere spádových kriviek,

A_N — orientácia reliéfu voči svetovým stranám,

φ — zemepisná šírka študovaného miesta na reliéfe,

δ — deklinácia Slnka pre zvolený deň d_i ($i = 1, 2, \dots, 365$).

Podrobnejšie pozri práce [4, 5, 13].

Zo vzťahu (1) vyplýva, že georeliéf na priestorovú diferenciáciu množstva dopadajúceho priameho slnečného žiarenia vplyva prostredníctvom jeho veličín γ_N , A_N , ale aj geometrickými formami a členitosťou, ktorá modifikuje hodnoty T_v , T_z vo vzťahu (2), podrobnejšie pozri [5, 13]. Keďže sa však z tohto dopadajúceho množstva odrazí späť do priestoru a aké množstvo je pohltené a transportované do hĺbky, závisí od vlastností litosféry, pedosféry a biosféry charakterizovaných v každom zvolenom mieste množinou matematických a fyzikálnych veličín, ale nie od vlastného reliéfu. Ak by sme teda takéto rozlíšenie neučinili a reliéf by sme ponímali ako hmotnú veličinu, nutne by z teoreticko-metodického hľadiska vyplynula otázka príslušnosti týchto sfér a ich veličín ku georeliéfu. Zároveň by z neho vyplynula napríklad aj nutnosť vyjadrenia tepelného toku v georeliéfe, a teda aj rýchlosť pretepfovania georeliéfu do hĺbky v smere jeho normály v každom jeho danom bode atď. Tak by sme sa

opäť dostali k špecifickej hmotnosti, tepelnej vodivosti a ku hrúbke georeliéfu atď., ktoré však podľa nášho názoru nie sú už parametrami georeliéfu, ale jeho hmotného nositeľa, litosféry.

Nie je však cieľom tejto práce podrobnejšie rozobrať tento problém do hĺbky. Stručne sme sa ho dotkli iba z hľadiska formulácie a zatriedenia jeho ukazovateľov a ich vplyvu na priestorovú diferenciáciu geoekologických procesov v krajine.

Nás z teoreticko-metodického hľadiska zaujíma georeliéf ako plocha a jej kvantitatívne ukazovatele (morfometrické parametre), ktoré vyjadrujú jej vlastnosti a geometrické formy vo vzťahu k ostatným zložkám krajiny ako látkovo-energetického a informačného organizovaného dynamického systému. Georeliéf je integrálnou súčasťou krajiny, ale zároveň má v nej zvláštne postavenie.

Krajinu v zmysle prác [7, 8, 9] chápeme ako priestorovo organizovaný, látkovo-energetický a informačný materiálny systém $S_C(P, T)$, študovaný v súradnicovej sústave $\langle O, \varphi, \lambda \rangle$, v ktorom môžeme na najnižšej rozlišovacej úrovni vyčleniť dva autonómne priestorovo organizované subsystémy $S_{AC}(P, T)$, $S_{FC}(P, T)$, ktoré sú v interakcii; $S_{AC}(P, T)$ — socioekonomická geografická sféra, $S_{FC}(P, T)$ — fyzickogeografická sféra. Symbol O vyjadruje v $\langle O, \varphi, \lambda \rangle$ počiatok súradnicovej sústavy totožný so stredom referenčnej plochy Zeme, φ — zemepisnú šírku, λ — zemepisnú dĺžku. Symbol $P = h, \varphi, \lambda$, kde $\pm h$ je výška v smere normály k referenčnej ploche Zeme, vyjadruje polohový aspekt a T — parameter času v systéme $S_C(P, T)$ a v jeho subsystémoch $S_{AC}(P, T)$, $S_{FC}(P, T)$. Sú teda charakterizované priestorovo diferencovaným tokom látok, energie a informácie. Georeliéf je zvláštnym subsystémom $S_{RF}(P, T)$ systému $S_{FC}(P, T)$. Ako plochu ho z teoreticko-metodického hľadiska považujeme za nemotný, hmotný je len nositeľ tejto plochy [1, 7]. V práci podáme definíciu georeliéfu a stručne načrtujeme jeho matematické vlastnosti ako plochy z hľadiska potrieb jeho modelovania pomocou Komplexného digitálneho modelu reliéfu (KDMR).

GEORELIÉF, JEHO MORFOMETRICKÉ PARAMETRE A GEOMETRICKÉ FORMY — DEFINÍCIA GEORELIÉFU

Uvažujeme v súradnicovej sústave $\langle O, \varphi, \lambda \rangle$ o reálnom priestore geografickej sféry geometricky určenom vzhľadom na referenčnú guľovú plochu Zeme (ďalej len RGP), vyjadrenú množinou bodov $F = [A_i(\varphi_i, \lambda_i)]_{i=1}^{\infty}$. Tento priestor je vymedzený v prácach [7, 8, 9, 12] množinou bodov $F_G = [M_i]_{i=1}^{\infty}$, kde $M_i = [A^*_{is}(\varphi_i, \lambda_i) h_{is}]_{s=1}^{\infty}$ pre každé jedno $i = 1, 2, \dots$ množinou bodov v intervale $\langle H_D, H_H \rangle$ na normále N_i vedenej k RGP v každom jej bode $A_i(\varphi_i, \lambda_i) \in F$, takže

$$F_G = [M_i]_{i=1}^{\infty} = [[A^*_{is}(\varphi_i, \lambda_i) h_{is}]_{s=1}^{\infty}]_{i=1}^{\infty}, \quad (3)$$

pričom $H_D \leq h_{is} \leq H_H$ pre $s = 1, 2, \dots$ pri každom jednom $i = 1, 2, \dots$. Pre $s = 1$ $h_{i1} = h_{min} = H_D$, čo je dolná hranica geografickej sféry, pre $s = j$ $h_{ij} = 0$, takže $A^*_{ij}(\varphi_i, \lambda_i) h_{ij} = 0 \equiv A_i(\varphi_i, \lambda_i) \in F$ a pre $s = \infty$ $h_{i\infty} = h_{max} = H_H$, čo je horná hranica geografickej sféry. Ak $h_{min} < 0$, potom $H_D = -h_{min}$, čo je hĺbka pod hladinou mora. Ak $h_{min} > 0$, potom $H_D = +h_{min}$, čo je nadmorská

výška dolnej hranice geografickej sféry. $H_{II} = h_{max}$ je maximálna nadmorská výška hornej hranice geografickej sféry na normále N_i prechádzajúcej bodom $A_i (\varphi_i, \lambda_i) \in F$.

Poznamenajme, že v diskretnom tvare bol reálny priestor geografickej sféry určený konečnou množinou

$${}_D F_G = [M_i]_{i=1}^n = \{ [A^*_{is} (\varphi_i, \lambda_i) h_{is}]_{s=1}^m \}_{i=1}^n \subset F = [M_i]_{i=1}^\infty = \\ = \{ [A^*_{is} (\varphi_i, \lambda_i) h_{is}]_{s=1}^\infty \}_{i=1}^\infty, \quad (4)$$

kde m, n sú konečne veľké celé čísla. V množine ${}_D F_G$ sú jej jednotlivé body $A_i (\varphi_i, \lambda_i) \in {}_D F = [A_i (\varphi_i, \lambda_i)]_{i=1}^n \subset {}_D F_G$ na RGP vzdialené od seba o $\Delta\varphi, \Delta\lambda$ a jednotlivé body $A^*_{is} (\varphi_i, \lambda_i) h_{is} \in M_i$ sú výškovo vzdialené od seba o Δh .

Geografická sféra ponímaná v tomto priestore $\langle O, \varphi, \lambda \rangle$ ako priestorovo organizovaný systém $S_G (P, T)$ vyjadrený v tvare usporiadanej dvojice

$$S_G (P, T) = \{ G_G (P, T), R_G (P, T) \}, \quad (5)$$

bola priestorovo vymedzená a charakterizovaná v prácach [7, 8]. Teraz iba poznamenajme, že v systéme (5) $G_G (P, T) = [g_i (P, T)]_{i=1}^{11}$ je množina jeho priestorovo lokalizovaných prvkov, z ktorých tento systém pozostáva a $R_G (\Delta P, T)$ je množina priestorových závislostí $r_{ij} (\Delta P, T)$ jednak navzájom medzi prvkami $g_i (P, T) \in G_G (P, T)$ a jednak medzi prvkami $g_i (P, T)$ a okolím g_0 systému (5). Pritom množina prvkov $G_G (P, T)$ v systéme $S_G (P, T)$ pozostáva z dvoch podmnožín

$$G_{AG} (P, T) = [g_j (P, T)]_{j=1}^6 \equiv [e_j (P, T)]_{j=1}^6; \\ G_{FG} (P, T) = [g_{6+k} (P, T)]_{k=1}^5 \equiv [a_k (P, T)]_{k=1}^5,$$

ktoré sú tvorené prvkami dvoch autonómnych priestorovo organizovaných subsystémov vyjadrených v tvare usporiadaných dvojíc

$$S_{AG} (P, T) = \{ G_{AG} (P, T), R_{AG} (\Delta P, T) \}; S_{FG} (P, T) = \{ G_{FG} (P, T), R_{FG} (\Delta P, T) \}, \quad (6)$$

kde $S_{AG} (P, T)$ — subsystém socioeconomickej sféry, $S_{FG} (P, T)$ — subsystém fyzickogeografickej sféry. Subsystémy (6) sú v interakcii, $S_{AG} (P, T) \rightleftharpoons S_{FG} (P, T)$. Z nich si bezprostredne, vzhľadom na georeliéf, všimneme subsystém $S_{FG} (P, T)$, o ktorom budeme ďalej uvažovať ako o samostatnom systéme.

Množina $G_{FG} (P, T) \subset G_G (P, T)$ je množinou prvkov $g_{6+k} (P, T) \equiv a_k (P, T)$, z ktorých tento systém pozostáva a $R_{FG} (\Delta P, T)$, je množinou závislostí, ktorá tvorí štruktúru tohto systému. Jednotlivé prvky $g_{6+k} (P, T) \equiv a_k (P, T) \in G_{FG} (P, T)$ reprezentujú v systéme $S_{FG} (P, T)$ na najnižšej rozlišovacej úrovni jednotlivé geosféry, z ktorých fyzickogeografická sféra pozostáva. Pri zvýšení rozlišovacej úrovne sú prvky $a_k (P, T)$ rozlíšené ako usporiadané podmnožiny $a_k (P, T) = [a_{kj} (P, T)]_{j=1}^{n_k}$, ktorých prvky $a_{kj} (P, T)$ reprezentujú pre jednotlivé

$k = 1, 2, \dots, 5$, $i = 1, 2, \dots, n_k$ jednotlivé zložky geosfér. Prítom $\mathbf{a}_1(P, T) = [a_{1j}(P, T)]_{j=1}^{n_1}$ — atmosféra, $\mathbf{a}_2(P, T) = [a_{2j}(P, T)]_{j=1}^{n_2}$ — hydrosféra, $\mathbf{a}_3(P, T) = [a_{3j}(P, T)]_{j=1}^{n_3}$ — litosféra, $\mathbf{a}_4(P, T) = [a_{4j}(P, T)]_{j=1}^{n_4}$ — pedosféra, $\mathbf{a}_5(P, T) = [a_{5j}(P, T)]_{j=1}^{n_5}$ — biosféra. Teda

$$G_{FC}(P, T) = [\mathbf{g}_{6+k}(P, T)]_{k=1}^5 \equiv [\mathbf{a}_k(P, T)]_{k=1}^5 = [[a_{kj}(P, T)]_{j=1}^{n_k}]_{k=1}^5. \quad (7)$$

Prvky $a_{kj}(P, T)$ jednotlivých usporiadaných podmnožín $\mathbf{a}_k(P, T) = [a_{kj}(P, T)]_{j=1}^{n_k}$ nie sú však navzájom nezávislé, ak existuje medzi nimi pre každé jedno $k = 1, 2, \dots, 5$ množina vzájomných vzťahov $Ra_k(\Delta P, T)$. Výsledne v zmysle prác [7, 8] uvedme, že ich môžeme študovať ako priestorovo organizované subsystémy

$$Sa_k(P, T) = (Ga_k(P, T), Ra_k(\Delta P, T))$$

systému $S_{FC}(P, T)$, kde $Ga_k(P, T) \equiv \mathbf{a}_k(P, T) = [a_{kj}(P, T)]$ pre každé jedno $k = 1, 2, \dots, 5$. Teda $Sa_1(P, T)$ — subsystém atmosféry, $Sa_2(P, T)$ — subsystém hydrosféry, atď.

Pretože systém $S_{FC}(P, T)$ je dynamický systém, v ktorom majú procesy stochastický charakter, vyjadríme z hľadiska nášho cieľa z citovaných prác [7, 8] ešte celkový stav $Z_{AG}(P, T)$ systému $S_{FC}(P, T)$, celkové stavy $Z_k(P, T)$ jeho jednotlivých subsystémov $Sa_k(P, T)$ reprezentujúcich geosféry, ako aj celkové stavy $Z_{kj}(P, T)$ ich jednotlivých prvkov $a_{kj}(P, T) \in Ga_k(P, T)$ reprezentujúcich jednotlivé zložky geosfér. Pre celkový stav $Z_{FC}(P, T)$ teda vzhľadom na množinu (5) platí, že

$$Z_{FC}(P, T) = [Z_k(P, T)]_{k=1}^5 = [[Z_{kj}(P, T)]_{j=1}^{n_k}]_{k=1}^5. \quad (8)$$

Poloha $P = \varphi, \lambda, h$ týchto stavov je určená polohou bodov $A^*_{is}(\varphi_i, \lambda_i) h_{is} \in F_G$.

Pod stavovými veličinami $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n$ rozumieme v zmysle prác [7, 8] matematické, matematickofyzikálne, fyzikálnochemické a iné numerické veličiny, ktorými je v každom časovom momente T určený stav každého prvku $a_{kj}(P, T) \in Ga_k(P, T)$.

Takáto formulácia systému $S_{FC}(P, T)$ je dôležitá jednak z hľadiska koncepcného poňatia geoinformačného systému geografického typu a jednak z hľadiska určenia príslušnosti stavových veličín, ktorými sú určené celkové stavy jednotlivých prvkov $a_{kj}(P, T) \in \mathbf{a}_k(P, T) \subset G_{FC}(P, T)$, a teda aj celkový stav systému $S_{FC}(P, T)$.

Príjmime teraz tézu z geomorfológie, že georeliéf je v každom časovom momente výslednicou modelačných procesov spôsobených vzájomným pôsobením endogénnych a exogénnych síl.

Uvažované z nášho hľadiska, sú to procesy charakterizované zmenou stavov (8) spôsobené interakciou jednotlivých geosfér $Sa_k(P, T)$ ako prvkov subsystémov systému $S_{FC}(P, T)$. Sú to na jednej strane prvky $a_{kj}(P, T) \in Ga_k(P, T)$ reprezentujúce pre $k = 3, 4, 5$ zložky litosféry, pedosféry, biosféry a ich stavy $Z_{kj}(P, T)$ a na druhej strane sú to prvky $a_{ki}(P, T) \in Ga_k(P, T)$ a ich stavy $Z_{ki}(P, T)$ reprezentujúce pre $k = 1, 2$, zložky atmosféry, hydrosféry a ich stavy.

Výsledkom interakcie je priestorový priebeh povrchových častí subsystémov litosféry $Sa_3(P, T)$, resp. pedosféry $Sa_4(P, T)$, ktorými je tvorený georeliéf. Priestorový priebeh povrchových častí $Sa_3(P, T)$, $Sa_4(P, T)$ je na jednej strane výsledkom spomenutých interakcií, avšak na druhej strane sám túto interakciu ovplyvňuje a priestorovo diferencuje.

Definícia georeliéfu. Uvažujme vo zvolenej súradnicovej sústave $\langle O, \varphi, \lambda \rangle$ o povrchových častiach litosféry $Sa_3(P, T)$, resp. pedosféry $Sa_4(P, T)$, charakterizovaných v každom bode $A_{ir}^*(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir}) \in \mathbf{M}_i \subset \mathbf{F}_G$ množinou stavových veličín

$$Z_3(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir}, T) = [Z_{3j}(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir}, T)]_{j=1}^{n_3} \quad Z_4(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir}, T) = [Z_{4j}(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir}, T)]_{j=1}^{n_4}$$

a tvoriacich v každom časovom momente T pevné, ale dynamické rozhranie medzi atmosférou $Sa_1(P, T)$, resp. hydrosférou $Sa_2(P, T)$. Zavedme na uvedené rozhranie vhodne zvolenú rozlišovaciu úroveň tak, aby sme mu z hľadiska jeho priestorového priebehu mohli prísúdiť vlastnosti plochy tvorenej množinou bodov $\mathbf{RF} = [A_{ir}^*(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir})]_{i=1}^{\infty}$, t. j., aby plocha tvorená uvedenou množinou \mathbf{RF} preložená týmto rozhraním bola s ním totožná. Takto uvažované pevné rozhranie nazvime zemským reliéfom — georeliéfom. Potom reliéf Zeme (georeliéf) je na určitej rozlišovacej úrovni vedené pevné, ale pritom dynamické rozhranie medzi litosférou $Sa_3(P, T)$, resp. pedosférou $Sa_4(P, T)$ na jednej strane a atmosférou $Sa_1(P, T)$, resp. hydrosférou $Sa_2(P, T)$ na druhej strane, ktoré má z hľadiska jeho priestorového priebehu, študovaného v súradnicovej sústave $\langle O, \varphi, \lambda \rangle$ vlastnosti plochy, a ktoré teda považujeme za plochu tvorenú množinou bodov

$$\mathbf{RF} = [A_{ir}^*(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir})]_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{F}_G = [\mathbf{M}_i]_{i=1}^{\infty} = \{[A_{is}^*(\varphi_i, \lambda_i, h_{is})]_{s=1}^{\infty}\}_{i=1}^{\infty}$$

na množine normál $\mathbf{N} = [N_i]_{i=1}^{\infty}$ v intervale $\langle H_D, H_H \rangle$ k RGP tvorenej množinou $\mathbf{F} = [A_i(\varphi_i, \lambda_i)]_{i=1}^{\infty}$.

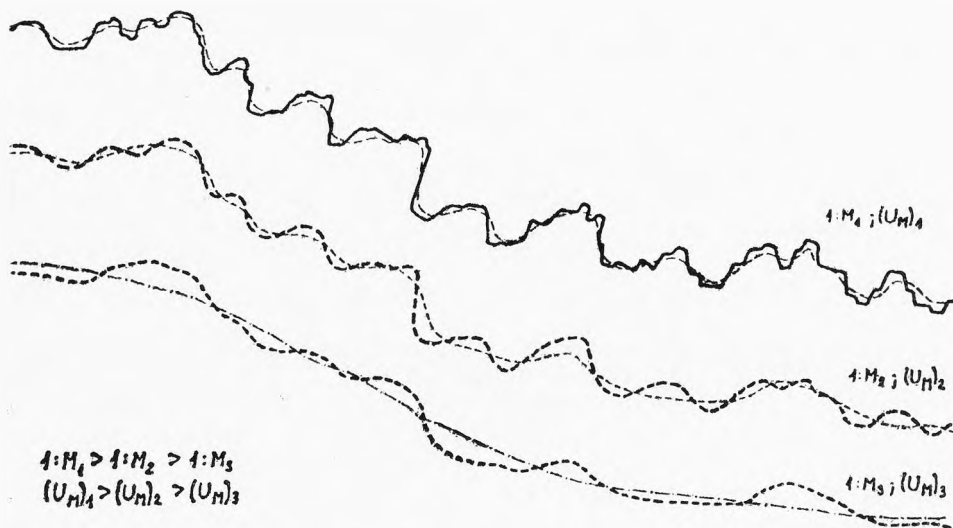
Poznámka 1. Voľba rozlišovacej úrovne je závislá od definovaného cieľa vymedzeného množinou kritérií, ktorými je potom výsledne určená aj mierka 1:M; na obr. 1 sú ilustratívne vyjadrené rôzne rozlišovacie úrovne.

Poznámka 2. Uvedené rozhranie je tvorené množinou bodov, ktorú môžeme považovať za štatistický súbor, takže plochu tvoriacu georeliéf môžeme potom zo štatistického hľadiska považovať za vyrovnávaciu plochu.

Poznámka 3. Uvažované rozhranie medzi litosférou — $Sa_3(P, T)$ resp. pedosférou — $Sa_4(P, T)$ na jednej strane a atmosférou — $Sa_1(P, T)$ na druhej strane tvorí suchozemský reliéf; rozhranie medzi litosférou $Sa_3(P, T)$ na jednej strane a hydrosférou $Sa_2(P, T)$ na druhej strane tvorí reliéf morského dna, jazerný reliéf a reliéf riečnych korýt.

Poznámka 4. Špecifickým prípadom suchozemského reliéfu je jednak „živý“ glaciálny reliéf tvoriaci na zvolenej rozlišovacej úrovni vedené rozhranie medzi litosférou $Sa_3(P, T)$ na jednej strane a hydrosférou $Sa_2(P, T)$ v pevnom skupenstve vo forme ľadovca na druhej strane a jednak reliéf povrchu ľadovca tvoriaci pevné rozhranie medzi ľadovcom a atmosférou.

Z definície georeliéfu je zrejmé, že hodnota výšky h_{ir} v každom bode $A_{ir}^*(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir})$ na reliéfe je pre každý časový moment T výslednicou predošlej postupnej zmeny stavov (8) jednotlivých prvkov subsystému $S_{FG}(P, T)$ za časový



Obr. 1. Rôzne rozlišovacie úrovne priebehu georeliéfu.

interval ΔT , v ktorých má na jednej strane dôležitú úlohu priestorové rozloženie stavov litosféry — $Sa_3(P, T)$, pedosféry — $Sa_4(P, T)$ a biosféry — $Sa_5(P, T)$ a na druhej strane priestorové rozloženie stavov atmosféry — $Sa_1(P, T)$ a hydrosféry $Sa_2(P, T)$. Dominantnú úlohu tu majú stavy litosféry $Sa_3(P, T)$ a postupnosť ich zmien za čas T ako výsledok vzájomnej interakcie, ktoré majú za následok zmenu výšky h_{ir} v každom bode $A^*_{ir}(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir})$.

Priestorové rozloženie výšok h_{ir} bodov $A^*_{ir}(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir})$ tvoriacich georeliéf je teda z tohto hľadiska vo funkčnom vzťahu k stavovým veličinám z_1, z_2, \dots, z_n , z ktorých vytvorené usporiadané množiny charakterizujú celkové stavy v (8). Hodnotu výšky h ako funkciu stavových veličín z_1, z_2, \dots, z_n polohy φ, λ a času T môžeme potom formálne vyjadriť vo všeobecnom tvare

$$h = f_R(z_1, z_2, \dots, z_n, \varphi, \lambda, T). \quad (9)$$

Táto funkcia vyjadruje priestorové rozloženie výšok a jeho vývoj v čase T vzhľadom na modelačné procesy. Poznamenajme, že funkcia (9) je v skutočnosti zloženou funkciou, v ktorej sú jednotlivé parametre vo vzájomnom vzťahu. Celý tento rozsiahly problém je predmetom bádania teoretickej a kvantitatívnej geomorfológie.

Nás zaujíma z hľadiska morfometrickej analýzy georeliéfu ako subsystemu $S_{RF}(P, T)$ a modelovania georeliéfu pomocou jeho komplexného digitálneho modelu vo zvolenej mierke 1:M.

Z funkcie (9) možno vyjadriť všeobecné funkčné vzťahy pre množinu morfometrických parametrov ako závisle premenných na stavových veličinách z_1, z_2, \dots, z_n na polohe φ, λ a na čase T . Sú to nasledujúce morfometrické parametre georeliéfu:

$\Delta h(P, T)$ — relatívna výška v smere spádových kriviek,

$\gamma_N (P, T)$ — sklon georeliéfu v smere spádových kriviek,
 $A_N (P, T)$ — orientácia (expozícia) georeliéfu voči svetovým stranám,
 $\omega (P, T)$ — normálová krivosť georeliéfu (krivosť v smere spádových kriviek,
 $K_r (P, T)$ — horizontálna krivosť (krivosť v smere vrstevníc),
 $K_H (P, T)$ — hlavná krivosť (normálová krivosť v smere dotyčnice k vrstevniciam)

a ďalšie odvodené morfometrické parametre rôznych úrovní, ako sú napr. geometrické formy všetkých hierarchických úrovní, atď. Ich veľkosti sa v každom bode $A^*_{ir} (\varphi_{ir}, \lambda_i, h_{ir}) \in \mathbf{RF}$ menia v priebehu času T s vývojom georeliéfu v závislosti od zmeny výšky h vo funkcií (9).

Tieto morfometrické parametre tvoria v každom bode $A^*_{ir} (\varphi_{ir}, \lambda_i, h_{ir}) \equiv A^*_{ir} (P) \in \mathbf{RF}$ množinu prvkov

$$G_{RF} (P, T) = (\Delta h (\Delta P, T), \gamma_N (P, T), A_N (P, T), \omega (P, T), K_r (P, T), K_H (P, T), \dots), \quad (10)$$

ktorých veľkosti v každom zvolenom bode $A^*_{ir} (P) \in \mathbf{RF}$ nie sú navzájom nezávislé, ale sú pospájané vzájomnými funkčnými vzťahmi, ktoré spolu tvoria množinu závislostí $R_{RF} (\Delta P, T)$.

Vplyv každého jednotlivého morfometrického parametra z (10) na priestorovú diferenciáciu jednotlivých subsystémov $Sa_k (P, T)$ a tým aj na priestorovú diferenciáciu systému $S_{FC} (P, T)$ ako celku závisí teda jednak od jeho vlastnej veľkosti a jednak od veľkostí ostatných morfometrických parametrov z množiny (10). Vplyv veľkosti ostatných morfometrických parametrov na veľkosť vplyvu zvoleného parametra je určený príslušnou podmnožinou závislostí z celkovej množiny $R_{RF} (\Delta P, T)$. Pretože morfometrické parametre v (10) sú odvodené z funkcie (9) vyjadrujúcej georeliéf ako dynamickú plochu, môžeme ho chápať ako zvláštny priestorovo diferencovaný nehmotný subsystém $S_{RF} (P, T)$ v krajine, ktorý vyjadříme v tvare usporiadanej dvojice

$$S_{RF} (P, T) = \{G_{RF} (P, T), R_{RF} (\Delta P, T)\}. \quad (11)$$

V nej je $G_{RF} (P, T)$ množina prvkov, z ktorých tento subsystém pozostáva a $R_{RF} (\Delta P, T)$ je množina vzájomných závislostí, a to jednak medzi prvkami množiny $G_{RF} (P, T)$ navzájom a jednak medzi prvkami množiny (10) a ostatnými prvkami systému $S_{FC} (P, T)$. Množina $R_{RF} (\Delta P, T)$ tvorí štruktúru subsystému $S_{RF} (P, T)$.

Georeliéf určený vzťahom (9) a vyjadrený ako subsystém $S_{RF} (P, T)$ je priestorovo diferencovaným systémom; jeho výška h , a teda aj jednotlivé prvky v usporiadanej množine (10) sa v každom bode $A^*_{ir} (\varphi_{ir}, \lambda_i, h_{ir}) \in \mathbf{RF}$ v priebehu času T dynamicky menia v závislosti od stavových veličín a dynamiky celkových stavov subsystémov $Sa_k (P, T)$ systému $S_{GF} (P, T)$. Dynamika zmien hodnôt výšok h a jednotlivých morfometrických parametrov v (10) vyvolaná interakciou týchto subsystémov je však vo väčších priestorových reláciách omnoho pomalšia ako dynamika týchto subsystémov $Sa_1 (P, T)$, $Sa_2 (P, T)$, čo závisí od vlastností subsystému $Sa_3 (P, T)$. Priestorová zmena výšok h v (9) a jednotlivých prvkov v (10) sa v dôsledku toho vo väčších priestorových reláciách za stabilných podmienok významnejšie prejaví až za $n \cdot 10^3 - n \cdot 10^5$ rokov ($n = 1, 2, \dots, 9$).

Zmena priestorovej diferenciácie geoeologických procesov v krajine vyvolaná zmenou priestorovej diferenciácie samotného georeliéfu je teda z hľadiska krátkych časových intervalov $\langle T_p, T_{K,i} \rangle$, kde $\{\Delta T_{PK}\}_i = T_{K,i} - T_p = 50, 100, 150$ rokov, veľmi malá; T_p — počiatočný zvolený časový moment, $T_{K,i}$ — koncový časový moment zvoleného časového intervalu $\{\Delta T_{P,K}\}_i$, $i = 1, 2, 3$. So zmenou času T v tomto časovom rozsahu $T_p \leq T \leq T_{K,i}$ je vplyv georeliéfu na priestorovú diferenciáciu procesov v krajine vo väčších priestorových reláciách omnoho väčší ako vplyv týchto procesov na zmenu priestorovej diferenciácie výšok h a morfometrických parametrov georeliéfu v (10).

Nás však teraz z hľadiska nášho cieľa zaujímajú práve tieto časové intervaly $\{\Delta T_{PK}\}_i = 50, 100, 150$ rokov. V nich budeme v príslušnej mierke 1:M uvažovať o vplyve georeliéfu na priestorovú diferenciáciu procesov v krajine, ale nie o vplyve týchto procesov na zmenu priestorovej diferenciácie georeliéfu; tento je v týchto časových reláciách vo väčšom priestorovom rozsahu a počnúc od určitej mierky 1:M nepodstatný.

Podstatný je len do určitého priestorového rozsahu a do určitej mierky 1:M. V zmysle uvedeného má teda v priebehu času $T_p < T \leq T_{K,i}$ vo vnútri týchto časových intervalov $\langle T_p, T_{K,i} \rangle$ význam študovať vplyv modelačných procesov na georeliéf v priestorovom rozsahu na úrovni svahov a len do takej mierky 1:M s príslušnou rozlišovacou úrovňou U_M , v ktorej možno rozlíšiť všetky priebežné zmeny výšok h a morfometrických parametrov georeliéfu v čase $T_p \leq T \leq T_{K,i}$, a nie iba výsledné zmeny za celkový časový interval $\{\Delta T_{PK}\}_i$.

Z hľadiska nášho zvoleného cieľa to znamená, že pre každý zvolený časový interval $\{\Delta T_{PK}\}_i = T_{K,i} - T_p = 50, 100, 150$ rokov je v študovanom priestore dôležité zvoliť takú mierku 1: M_i s rozlišovacou úrovňou $U_{M,i}$ ($i = 1, 2, 3$), v ktorej je celková zmena výšky h o hodnotu Δh na georeliéfe pod hranicou, maximálne na hranici jej rozlišovacej úrovne; tým je však pod touto hranicou aj zmena jednotlivých morfometrických parametrov v množine (10). Pre mierky 1: M_i jednotlivých časových intervalov $\{\Delta T_{PK}\}_i = 50, 100, 150$ rokov ($i = 1, 2, 3$) bude teda platiť, že

$$\frac{1}{M_1} > \frac{1}{M_2} > \frac{1}{M_3} \text{ pre } \{\Delta T_{PK}\}_1 < \{\Delta T_{PK}\}_2 < \{\Delta T_{PK}\}_3.$$

Preto pre tieto intervaly $\{\Delta T_{PK}\}_i$ môžeme v im zodpovedajúcich mierkach 1: M_i považovať premenné stavové veličiny z_1, z_2, \dots, z_i a parameter času T vo funkcii (9) za konštanty a funkciu (9) nahradiť zjednodušenou funkciou

$$h = F_R(\varphi, \lambda). \quad (12)$$

V nej sú výšky h už len funkciou polohy φ, λ , takže plocha ňou vyjadrená je už plochou statickou a tak isto, na rozdiel od parametrov z množiny (10) sú statické aj morfometrické parametre odvodené z tejto funkcie (12). Namiesto množiny (10) dostávame tak z funkcie (12) pre každý bod $A^*_{ir}(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir}) \in \mathbf{RF}$ množinu statických morfometrických parametrov

$$\mathbf{G}_{RF}(P) = \{\Delta h(P), \gamma_N(P), A_N(P), \omega(P), K_r(P), K_H(P), \dots\}, \quad (13)$$

ktorých hodnoty sú už iba funkciou polohy φ, λ , ale nie času T ako to napríklad

plynie z funkčných vzťahov pre dva základné z nich, t. j. γ_N , A_N odvodených z (12), kde

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_N &= |\operatorname{grad} h| = \sqrt{\left(\frac{\partial F_R(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_R(\varphi, \lambda)}{\partial \lambda}\right)^2} \Rightarrow \gamma_N = \operatorname{arc} \operatorname{tg} |\operatorname{grad} h| \\ \operatorname{tg} A_N &= \frac{\frac{\partial F_R(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi}}{\frac{\partial F_R(\varphi, \lambda)}{\partial \lambda}} \Rightarrow A_N = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\frac{\partial F_R(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi}}{\frac{\partial F_R(\varphi, \lambda)}{\partial \lambda}} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Pretože množina $G_{RF}(P)$ (13) odvodená z funkcie (12) vyjadruje georeliéf pre časový interval $(\Delta T_{PK})_i$ ako statickú plochu, množina vzájomných závislostí $R_{RF}(\Delta P)$ medzi jednotlivými prvkami v (13) je už tak isto množinou statických závislostí. Preto georeliéf určený plochou (12) a jej morfometrickými parametrami (13) vyjadríme teraz pre časový interal $(T_P, T_K)_i$ v mierke 1:M ako priestorovo organizovaný statický systém

$$S_{RF}(P) = (G_{RF}(P), R_{RF}(\Delta P)). \quad (15)$$

Pri interakcii tohto subsystému (15) so subsystémami $Sa_k(P, T)$ študujeme v intervale $T_P \leq T \leq T_{K,i}$ už iba vplyv tohto subsystému na priestorovú diferenciáciu stavov subsystémov $Sa_k(P, T)$ v systéme $S_{FC}(P, T)$, ale nie vplyv týchto subsystémov na subsystém $S_{RF}(P)$.

Z hľadiska nášho cieľa je subsystém (15) po jeho zobrazení do abstraktného kartografického (zobrazovacieho) priestoru predmetom modelovania pomocou Komplexného digitálneho modelu georeliéfu. Preto poznamenajme, že funkcia (12) je v súradnicovej sústave $\langle O, \varphi, \lambda \rangle$ reálneho priestoru geografickej sféry jednak funkciou opisujúcou georeliéf ako statickú priestorovú plochu určenú množinou bodov \mathbf{RF} a jednak je funkciou skalárneho poľa výšok, ktorého skalárnou bázou je RGP.

GEORELIÉF V ZOBRAZOVACOM PRIESTORE GEOGRAFICKEJ SFÉRY — SKALÁRNE POLE VÝŠOK A JEHO INTERPOLAČNÁ PLOCHA (TOPOGRAFICKÁ PLOCHA) GEORELIÉFU

Pod zobrazovacím priestorom geografickej sféry rozumieme tú časť abstraktného priestoru uvažovaného v karteziánskej súradnicovej sústave $\langle O, x, y, z \rangle$ v mierke 1:M, do ktorého je na základe operácie zobrazenia zobrazený reálny priestor geografickej sféry vymezený vzhľadom na RGP Zeme v súradnicovej sústave $\langle O, \varphi, \lambda \rangle$; rovina (x, y) súradnicovej sústavy $\langle O, x, y, z \rangle$ je v zobrazovacom priestore obrazom RGP Zeme z reálneho priestoru. Tento zobrazovací priestor je určený množinou bodov $A^*_{is}(x_i, y_i, z_{is})$, ktorú označíme symbolom \mathbf{E}_G , pričom jeho rovina (x, y) je tvorená množinou bodov $A'_i(x_i, y_i)$, ktorú označíme symbolom $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_G$. Množina \mathbf{E}_G a $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_G$ je obrazom množiny \mathbf{F}_G a $\mathbf{F} \subset \mathbf{F}_G$.

Uvažujme teda o jednoznačnej operácii zobrazenia bodov $A^*_{is}(\varphi_i, \lambda_i, h_{is}) \in \mathbf{F}_G$ reálneho priestoru do bodov $A^*_{is}(x_i, y_i, z_{is}) \in \mathbf{E}_G$ abstraktného zobrazovacieho priestoru, t. j. o operácii zobrazenia

$$\mathbf{F}_G: \rightarrow \mathbf{E}_G \triangleleft \mathbf{E}_G: \rightarrow \mathbf{F}_G \langle \Longrightarrow \rangle \mathbf{F}_G: \rightleftharpoons \mathbf{E}_G \quad (16)$$

určenej zobrazovacími rovnicami

$$\begin{aligned} x_i &= f_1(\varphi_i, \lambda_i); y_i = f_2(\varphi_i, \lambda_i); z_{is} = h_{is} \\ \varphi_i &= F_1(x_i, y_i); \lambda_i = F_2(x_i, y_i); h_{is} = z_{is}. \end{aligned} \quad (17)$$

Nimi je teda vzhľadom na $\mathbf{F} \subset \mathbf{F}_G$, $\mathbf{M}_i \subset \mathbf{F}_G$ určená aj operácia zobrazenia

$$\mathbf{F}: \rightarrow \mathbf{E} \triangleleft \mathbf{E}: \rightarrow \mathbf{F} \langle \Longrightarrow \rangle \mathbf{F}: \rightleftharpoons \mathbf{E}, \quad (18)$$

množiny bodov \mathbf{F} RGP Zeme do množiny bodov \mathbf{E} zobrazovacej roviny (x, y) , a naopak aj operácia zobrazenia

$$\mathbf{M}_i: \rightarrow \mathbf{M}'_i \triangleleft \mathbf{M}'_i: \rightarrow \mathbf{M}_i \langle \Longrightarrow \rangle \mathbf{M}_i: \rightleftharpoons \mathbf{M}'_i \quad (18)$$

množiny bodov $\mathbf{M}_i = [A'_{is}(x_i, y_i, z_{is})]_{s=1}^{\infty}$ na normále N_i k RGP do množiny bodov \mathbf{M}'_i na normále $N'_i \equiv Z_i \perp (x, y)$ v každom bode $A_i(x_i, y_i) \in \mathbf{E}$. Pritom operácia zobrazenia (18) je určená prvými dvomi rovnicami (17) v prvom a druhom riadku a operácia zobrazenia (19) je určená všetkými rovnicami (17).

Zobrazovací priestor geografickej sféry je teda v mierke 1:M určený množinou bodov

$$\mathbf{E}_G = [\mathbf{M}'_i]_{i=1}^{\infty} = \{[A'_{is}(x_i, y_i, z_{is})]_{s=1}^{\infty}\}_{i=1}^{\infty} \quad (20)$$

a v diskretnom tvare je určený konečnou množinou bodov

$${}_D\mathbf{E}_G = [{}_D\mathbf{M}'_i]_{i=1}^n = \{[A'_{is}(x_i, y_i, z_{is})]_{s=1}^m\}_{i=1}^n, \quad (21)$$

kde m, n sú konečné čísla.

Operáciou zobrazenia (16) je určené aj zobrazenie množiny bodov $\mathbf{RF} \subset \mathbf{F}_G$ georeliéfu z reálneho priestoru do množiny bodov $\mathbf{E}^*_{RF} \subset \mathbf{E}_G$ v zobrazovacom priestore, t. j. zobrazenie

$$\mathbf{RF} = [A'_{ir}(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir})]_{i=1}^{\infty} : \rightleftharpoons \mathbf{E}^*_{RF} = [A'_{ir}(x_i, y_i, z_{ir})]_{i=1}^{\infty}, \quad (22)$$

takže georeliéfu vo vymedzenom reálnom priestore bude zodpovedať zobrazená plocha — topografická plocha georeliéfu v mierke 1:M v zobrazovacom priestore.

Ak uvažujeme o RGP ako o skalárnej báze skalárneho poľa výšok h_{ir} a množinu \mathbf{F} na RGP tvoriacu toto pole označíme symbolom $\mathbf{F}_R = [A'_i(\varphi_i, \lambda_i) h_{ir}]_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{F}_G$, kde h_{ir} je hodnota skalára ako funkcie polohy φ_i, λ_i priradená ku každému bodu $A'_i(\varphi_i, \lambda_i) \in \mathbf{F}$ na základe funkcie (12), potom toto skalárne pole sa operáciou zobrazenia (16) zobrazí do množiny $\mathbf{E}_R = [A'_i(x_i, y_i) z_{ir}]_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{E}_G$, t. j.

$$\mathbf{F}_R = [A'_i(\varphi_i, \lambda_i) h_{ir}]_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{F}_G : \rightleftharpoons \mathbf{E}_R = [A'_i(x_i, y_i) z_{ir}]_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{E}_G. \quad (23)$$

Hodnoty z_{ir} vo význame výšok na topografickej ploche georeliéfu (súradnice z_{ir}) v (22), ako aj hodnoty z_{ir} vo význame skalárov v (23) sú určené funkciou

$$z = z(x, y), \quad (24)$$

ktorá je zobrazením

$$h = F_R(\varphi, \lambda) : z \in z = z(x, y),$$

kde x, y , ako aj φ, λ sú určené zobrazovacími rovnicami v (17). Zobrazené nadmorské výšky z nadobúdajú vo funkcii (24) hodnoty v intervale $\langle z_D, z_H \rangle$, kde z_D — dolná hodnota zobrazenej nadmorskej výšky, z_H — horná hodnota zobrazenej nadmorskej výšky.

Topografická plocha georeliéfu je v zobrazovacom priestore jednoznačne určená funkciou (24). Funkcia (24) je zároveň podkladom pre odvodenie všetkých morfometrických parametrov bez parametra času T , ktoré tvoria množinu

$$G_{RF,K}(P') = (\Delta z(P'), \gamma_N(P'), \omega(P'), K_r(P'), K_H(P'), \dots), \quad (25)$$

pričom symbol $P' = x_i, y_i, z_i$ vyjadruje polohu ľubovoľného i -tého bodu $A'_i(x_i, y_i, z_i) \in E_{RF}^*$ na topografickej ploche, alebo polohu $P' = (x_i, y_i) z_i$ bodu $A'_i(x_i, y_i) z_i \in E_{RF}$ v skalárnej báze, ku ktorému je množina (25) priradená.

Funkcia (24) je východiskom pre modelovanie georeliéfu jeho komplexným digitálnym modelom — KDMR. Jej vlastnosti sa vo forme sústavy podmienok, pravidiel a vzťahov premietajú do algoritmov KDMR, pomocou ktorého je tak potom možné realizovať na zvolenej rozlišovacej úrovni jednak plnoautomatizovanú morfometrickú analýzu georeliéfu s výstupom na mapu a jednak modelovať vplyv georeliéfu na priestorovú diferenciaciu geoeologických procesov.

MATEMATICKÉ VLASTNOSTI SPOJITÉHO SKALÁRNEHO POĽA VÝŠOK A JEHO INTERPOLAČNEJ PLOCHY Z HĽADISKA KOMPLEXNÉHO DIGITÁLNEHO MODELU RELIÉFU (KDMR)

Z hľadiska morfometrickej analýzy georeliéfu sú v zmysle práce [21] a prác [6, 8] dôležité tzv. štruktúrne vlastnosti funkcie (24). Charakterizuje ich jednak zákonitosť rozdelenia skalárnych hodnôt definičnej funkcie $z(x, y)$ a jednak zákonitosť priestorového rozloženia jej parciálnych derivácií prvého a druhého rádu

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} &= z_x(x, y); \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = z_y(x, y); \quad \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = z_{yy}(x, y) \\ \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} &= z_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} = z_{xy}(x, y) \end{aligned} \quad (26)$$

do jednotlivých bodov $A^i(x_i, y_i) z_i \in E_{RF}$ a podoblastí skalárnej bázy (x, y) . Predpokladáme o nich, že sú konečné, jednoznačné a spojité [4, 6, 21]. Parciálne derivácie (26) môžu ako funkcie polohy x, y v skalárnej báze nadobúdať hodnoty väčšie ako nula, rovné nule, menšie ako nula, takže každá z nich tvorí v skalárnej báze (x, y) nové skalárne pole. Sú východiskom k odvodeniu množiny štruktúrnych veličín topografickej plochy georeliéfu, t. j. množiny morfometrických parametrov $G_{RF}(P')$ (25), ktoré tvoria v skalárnej báze (x, y) tzv. štruktúrne polia základného (primárneho) výškového poľa (12). Určené sú v zmysle prác [6, 7, 8] vzťahmi

$$|\text{grad } z| = \text{tg } \gamma_N = \sqrt{z_x^2 + z_y^2} \Rightarrow \gamma_N = \text{arc tg } (\sqrt{z_x^2 + z_y^2}) \quad (27)$$

$$\text{tg } A_N = \frac{z_y}{z_x} \Rightarrow A_N = \text{arc tg } \frac{z_y}{z_x} \quad (28)$$

$$\omega = \frac{z_x^2 z_{xx} + 2 z_{xy} z_x z_y + z_{yy}^2 z_{yy}}{(z_x^2 + z_y^2) \sqrt{(1 + z_x^2 + z_y^2)^3}} \quad (29)$$

$$K_r = \frac{z_y z_{xx} - 2 z_{xy} z_x z_y + z_x z_{yy}}{\sqrt{(z_x^2 + z_y^2)^3}}$$

$$K_H = K_r \sin \gamma_N = \frac{z_{xx} z_y^2 - 2 z_{xy} z_x z_y + z_{yy} z_x^2}{(z_x^2 + z_y^2) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad (30)$$

v ktorých parciálne derivácie (26) vystupujú ako funkcie polohy x, y . Pre stručnosť zápisu je však poloha x, y vynechaná. Tieto štruktúrne (sekundárne) polia (27) až (30) charakterizujú vnútornú stavbu (štruktúru) ich primárneho skalárneho poľa výšok (24). Majú preto oproti nemu svoje vlastné matematické vlastnosti. Podrobne pozri práce [6, 21]. Na základe morfometrických parametrov ω, K_r , resp. ω, K_H bol v prácach [6, 8, 10] definovaný v každom bode $A'_i [(x_i, y_i) z_i] \in \mathbf{E}_{RF}$ skalárnej bázy (x, y) , a teda aj v jemu zodpovedajúcom bode $A^*_i (x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}^*_{RF}$ topografickej plochy georeliéfu tzv. fázový priestor $\langle O, \omega, K_r \rangle$, resp. $\langle O, \omega, K_H \rangle$, na základe ktorého boli v prácach [6, 8, 15] definované geometrické formy georeliéfu rôznych hierarchických úrovní. V prvej hierarchickej úrovni sú to formy, ktoré tvoria množinu

$$\mathbf{F} = (F_{XX}, F_{KX}, F_{KK}, F_{XK}, F_{XL}, F_{LX}, F_{KL}, F_{LK}, F_{LL}) \subset G_{RF}, \quad (31)$$

pričom pre jednotlivé z nich vzhľadom na znamienko (\pm) ω a K_r platí, že $F_{XX} (\omega > 0, K_r > 0)$, $F_{KX} (\omega < 0, K_r > 0)$, $F_{KK} (\omega < 0, K_r < 0)$, $F_{XK} (\omega > 0, K_r < 0)$, $F_{XL} (\omega > 0, K_r = 0)$, $F_{LX} (\omega = 0, K_r > 0)$, $F_{KL} (\omega < 0, K_r = 0)$, $F_{LK} (\omega = 0, K_r < 0)$, $F_{LL} (\omega = 0, K_r = 0)$.

Podrobne pozri prácu [6, 8] a práce [4, 10, 14, 15].

Z matematických vlastností funkcie (24) sú odvodené aj podmienky a pravidlá pre rozloženie bodov diskretného bodového poľa výšok ${}_D \mathbf{E}_{RF}$.

O funkcii predpokladáme, že je spojitá buď v celej skúmanej oblasti, alebo v jej jednotlivých častiach. Tieto v nej tvoria otvorené alebo uzatvorené areály $\{AR\}_s$ ($s = 1, 2, \dots$), ktoré sú v skalárnej báze čiastočne alebo úplne ohraničené krivkami B_r ($r = 1, 2, \dots$). Funkcia (24) je spojitá v ľubovoľnom bode $A'_i (x_i, y_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ skalárnej bázy, ak

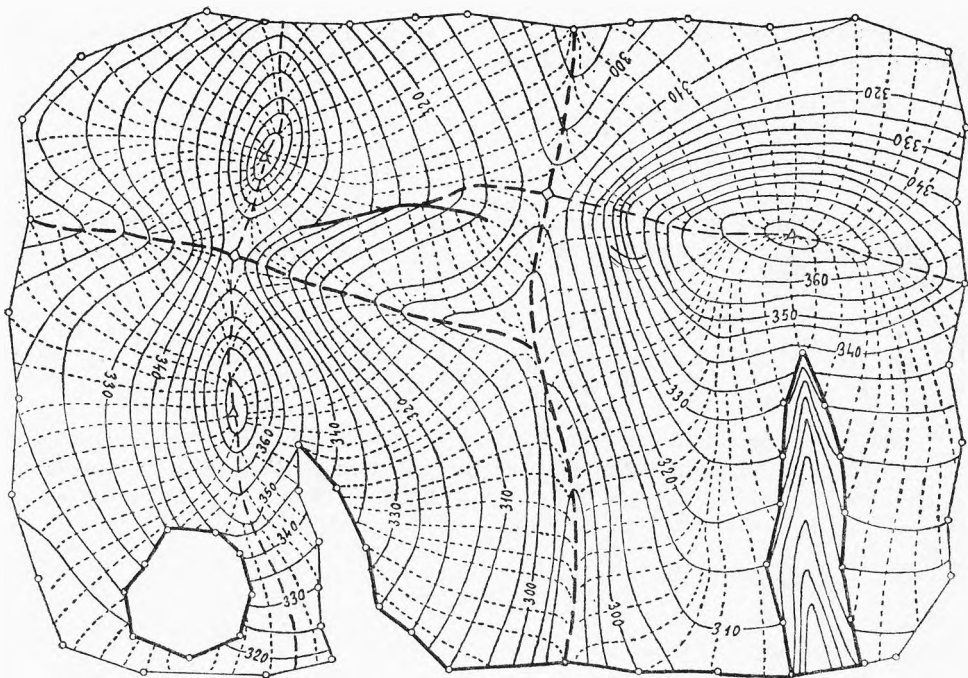
$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ y \rightarrow y_i}} z(x, y) = z(x_i, y_i) \quad (32)$$

V oblasti spojitosti funkcie (24) je v zmysle (32) každému jednému bodu $A'_i (x_i, y_i) \in \mathbf{E}_{RF}$ jednoznačne priradená jedna hodnota skalára z_i , ktorá sa spojito mení z jedného bodu do druhého.

Spojité izočiarové (vrstevnicové) pole skalárneho poľa výšok je v zmysle prác [6, 8, 21] určené rovnicou

$$z(x, y) = C, \text{ resp. } z_x(x, y) dx + z_y(x, y) dy = 0, \quad (33)$$

kde C je premenný parameter v intervale $C_d \equiv z_d < C \leq C_h \equiv z_h$. Druhá rovnica v (33) je diferenciálny tvar prvej rovnice. Spádové krivky k vrstevniciam



- | | | |
|-----------|-------------|----------|
| 1 — 330 — | 4 ◊ | 7 ———— |
| 2 ————— | 5 - - - - - | 8 ○ ———— |
| 3 △ | 6 - - - - - | |

Obr. 2. Spojité skalárne pole výšok, jeho izočiarové (vrstevnicové) pole s poľom spádových kriviek a jeho singulárne oblasti:

1 — vrstevnice, 2 — terénne hrany, 3 — singulárne izolované body pozitívne (vrcholové body), 4 — singulárne dvojné body (sedlové body), 5 — rozhraničujúce údolnice [údolnice oddeľujúce navzájom od seba jednotlivé singulárne oblasti], 6 — chrbátice, 7 — spádové krivky, 8 — ohraničujúce čiary študovanej oblasti.

sú v zmysle prác [6, 21] určené rovnicou $\psi(x, y) = B$; ak B označuje premenný parameter, potom je touto rovnicou určené pole spádových kriviek k vrstevnicovému poľu (obr. 2). Pole spádových kriviek je teda určené rovnicou

$$\psi(x, y) = B, \text{ resp. } \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} dy = 0, \quad (34)$$

príčom

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \lambda(x, y); \quad \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \lambda(x, y),$$

kde $\lambda(x, y)$ je integračný faktor [6, 21].

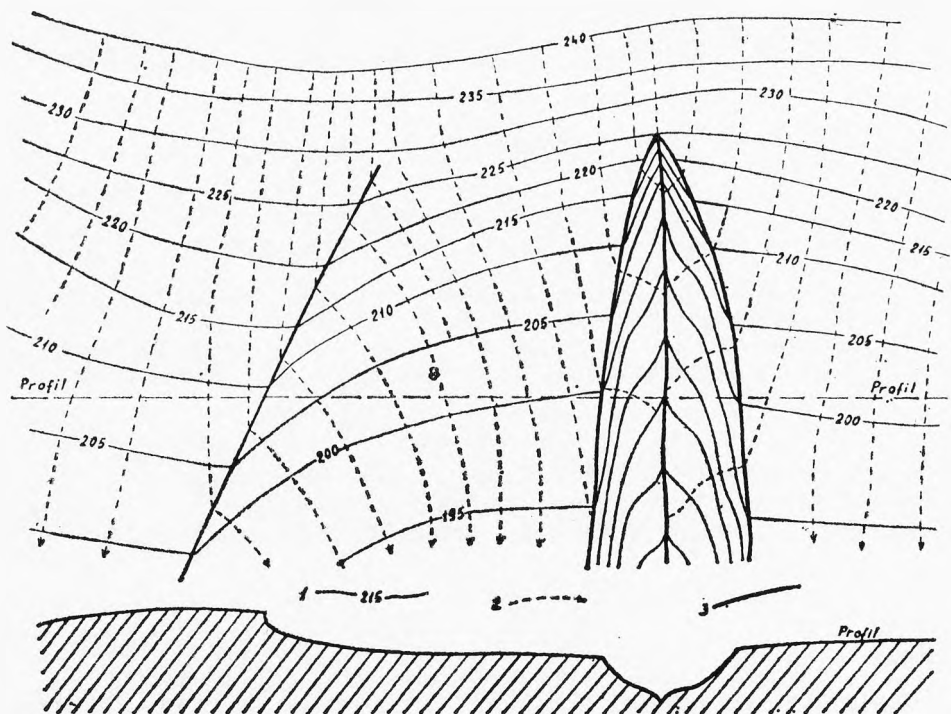
Vrstevnice sú hladké (nelomené) krivky vtedy, ak v každom ich bode dy/dx sprava (+) je rovné dy/dx zľava (-), t. j.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(+)} = \left[-\frac{z_x(x,y)}{z_y(x,y)}\right]_{(+)} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-)} = \left[-\frac{z_x(x,y)}{z_y(x,y)}\right]_{(-)}. \quad (35)$$

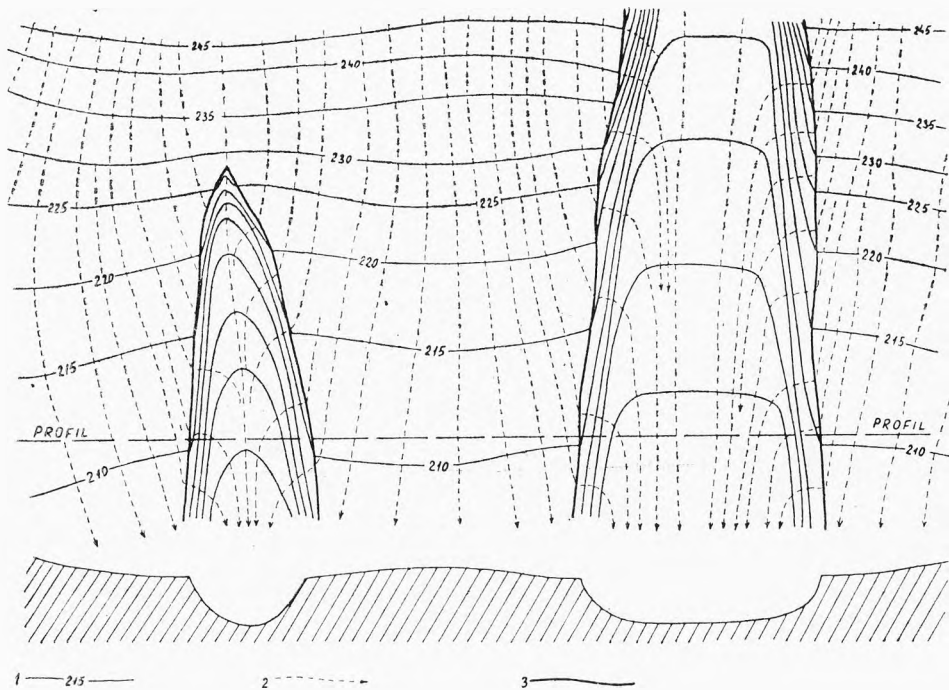
Podobne spádové krivky sú hladké (nelomené) vtedy, ak v každom ich bode je derivácia $\partial z/\partial n$ v smere spádovej krivky rovnaká sprava (+) aj zľava (-), t. j.

$$\left[\frac{\partial z}{\partial n}\right]_{(+)} = \left[z_x \frac{dx}{dn} + z_y \frac{dy}{dn}\right]_{(+)} = \left[\frac{\partial z}{\partial n}\right]_{(-)} = \left[z_x \frac{dx}{dn} + z_y \frac{dy}{dn}\right]_{(-)}. \quad (36)$$

Terénna hrana je v zmysle prác [6, 8, 9] na topografickej ploche georeliéfu taký útvar tvorený podmnožinou bodov $E_O \subset E_{RF}$, resp. $E^*_O \subset E^*_{RF}$, v ktorom sa vrstevnice, a teda aj spádové krivky v každom bode $A'_i \in E_O \subset E_{RF}$, resp. $A^*_i \in E^*_O \subset E^*_{RF}$ lomia, t. j. náhle menia svoj smer tak, že



Obr. 3. Priebeh vrstevníc a spádových kriviek vrstevnicového poľa a poľa spádových kriviek na terénnych hranách — terénna hrana bezvýmoľa a s výmoľom: 1 — vrstevnice, 2 — spádové krivky, 3 — terénne hrany.



Obr. 4. Priebeh vrstevnic a spádových kriviek na terénnych hranách, výmole so spojitým priebehom vrstevnic — výmole s oblým dnom a výmole s rozsiahlym plochým dnom:

1 — vrstevnice, 2 — spádové krivky, 3 — terénne hrany.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(+)} = \left(-\frac{z_x}{z_y}\right)_{(+)} \neq \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-)} = \left(-\frac{z_x}{z_y}\right)_{(-)}$$

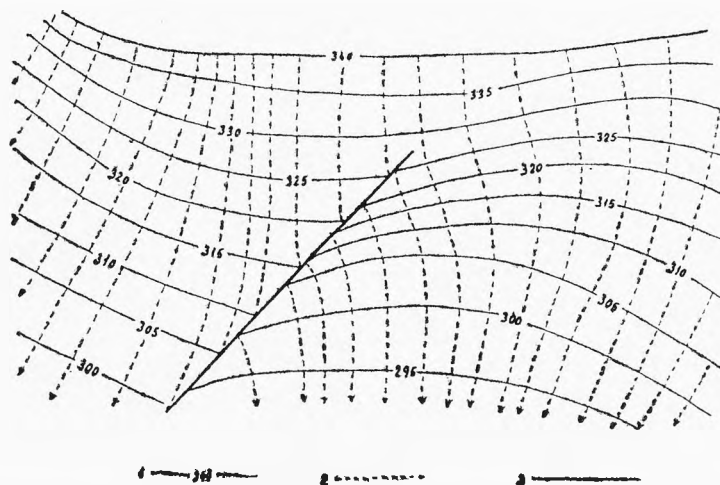
$$\left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)_{(+)} = \left(z_x \frac{dx}{dn} + z_y \frac{dy}{dn}\right)_{(+)} \neq \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)_{(-)} = \left(z_x \frac{dx}{dn} + z_y \frac{dy}{dn}\right)_{(-)} \quad (37)$$

pričom funkcia (24) je v nej spojitá, t. j. platí (32), pozri obr. 3. To platí aj pre výmole, pričom tieto môžu mať ostré dno tvorené hranou (obr. 3) alebo oblé až ploché dno (obr. 4). Na obr. 5 je vyjadrená v skalárnej báze terénna hrana, ktorej na topografickej ploche georeliéfu zodpovedá stena. V tomto prípade platia vzťahy (37), avšak skalárne pole ani jeho topografická plocha georeliéfu nie sú spojité, teda nie je splnená podmienka (32). Toto rozlíšenie je potrebné pre modelovanie georeliéfu pomocou KDMR.

Ak je funkcia (24) v študovanej oblasti spojitá v uzatvorených areáloch $\{AR\}_s$ ($s = 1, 2, \dots$), potom každý jeden z nich je v skalárnej báze tvorený množinou jeho vnútorných bodov

$$\{ER_{F,AR}\}_s^V = [A'_i(x_i, y_i) z_i]_{i=1}^{\infty} \text{ pre } s = 1, 2, \dots, m \quad (38)$$

a je ohraničený množinou bodov



Obr. 5. Priebeh vrstevníc a spádových kriviek na terénnych hranách s porušením spojitosti skalárneho poľa výšok a jeho izočiarového (vrstevnicového) poľa — steny na georeliéfe a jeho topografickej ploche:
 1 — vrstevnice, 2 — spádové krivky, 3 — terénna hrana v mape predstavujúca stenu na topografickej ploche georeliéfu.

$$(\mathbf{E}_{RF,B}^u)_s = [A'_i(x_i, y_i), \langle \{z_D\}_i, \{z_H\}_i \rangle]_{i=1}^{\infty} \text{ pre } s = 1, 2, \dots, m \quad (39)$$

ktorá tvorí v skalárnej báze uzatvorenú krivku B_s . Ku každému bodu $A'_i \in (\mathbf{E}_{RF,B}^u)_s$ je namiesto jednej skalárnej hodnoty z_i priradená množina hodnôt skalárov z z intervalu $\langle \{z_D\}_i, \{z_H\}_i \rangle$, kde $\{z_D\}_i$ je dolná hodnota, $\{z_H\}_i$ horná hodnota skalárov z . To znamená, že v každej množine (39) je skalárne pole výšok v zmysle (32) nespojité. Pre (38) a (39) pre každé jedno $s = 1, 2, \dots, m$ platí, že

$$(\mathbf{E}_{RF,AR}^v)_s \cap (\mathbf{E}_{RF,B}^u)_s = \emptyset. \quad (40)$$

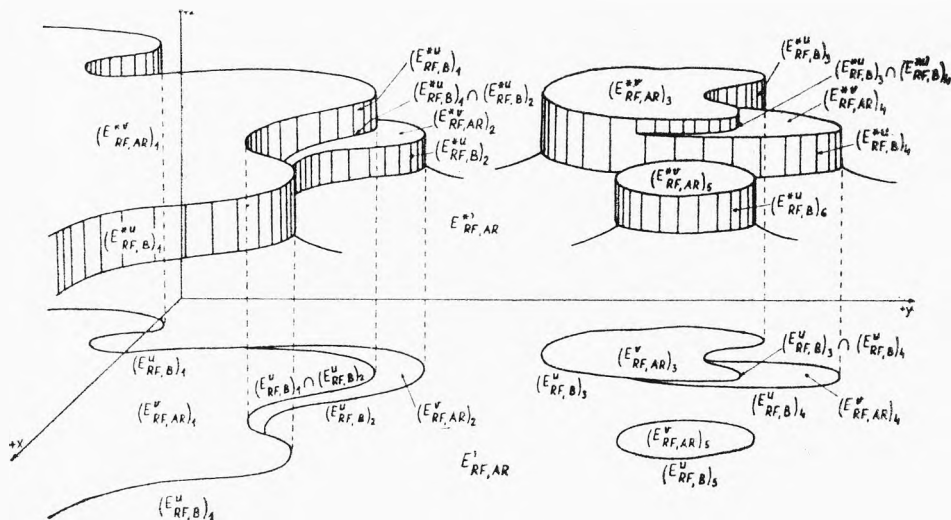
Ak sú jednotlivé množiny (38) pre jednotlivé $s = 1, 2, \dots, m$ navzájom izolované, t. j. spolu nesusedia, potom sú oddelené množinou

$$\mathbf{E}'_{RF,AR} = [A'_i(x_i, y_i, z_i)]_{i=1}^{\infty}, \quad (41)$$

v ktorej je v zmysle (32) skalárne pole opäť spojité. Pre celú skúmanú oblasť potom platí, že

$$\mathbf{E}_{RF} = \bigcup_{i=1}^s (\mathbf{E}_{RF,AR}^v)_i \bigcup_{i=1}^s (\mathbf{E}_{RF,B}^u)_i \cup \mathbf{E}'_{RF,AR}. \quad (42)$$

Ak je naopak celá skúmaná oblasť tvorené navzájom susediacimi množinami (38), potom



Obr. 6. Topografická plocha tabuľového georeliéfu so skalnými stenami a jej zobrazenie v skalárnej báze.

$(E_{RF,AR}^v)_i$, $(i = 1, 2, \dots, 5)$ — množiny bodov tvoriace uzatvorené areály, v ktorých je skalárne pole a jeho izočiarové (vrstevnicové) pole spojité a im odpovedajúce množiny $(E_{RF,AR}^v)_i$ na topografickej ploche georeliéfu.

$(E_{RF,B}^u)_i$ — množiny bodov tvoriace v skalárnej báze uzatvorené krivky oddeľujúce v skalárnej báze (x, y) uzatvorené oblasti (areály) od ich okolia. Skalárne pole je v týchto množinách $(E_{RF,B}^u)_i$ nespojité, na topografickej ploche georeliéfu im odpovedajú zvislé steny vyjadrené množinami $(E_{RF,AR}^u)_i$.

$E'_{RF,AR}$ — množina bodov tvoriacich okolie množín $(E_{RF,AR}^v)_i$. V tejto množine je skalárne pole a jeho izočiarové (vrstevnicová) pole spojité; na topografickej ploche jej odpovedá množina $E''_{RF,AR}$.

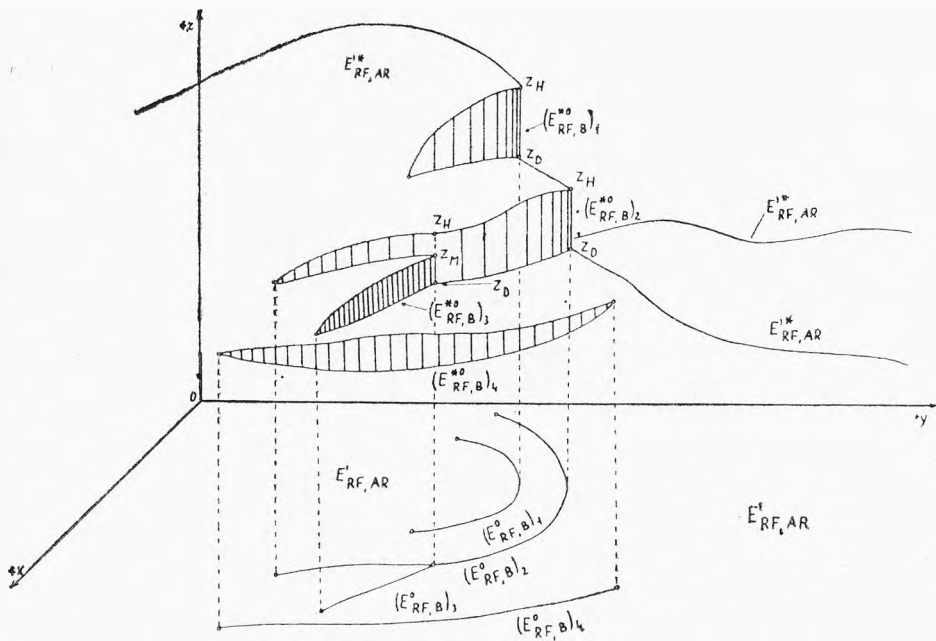
$$\mathbf{E}_{RF} = \bigcup_{i=1}^s (E_{RF,AR}^v)_i. \quad (43)$$

Ak skalárne pole výšok pozostáva v študovanej oblasti z čiastočne uzatvorených areálov $(AR)_r$, ktorých hranice tvoria v skalárnej báze ohraničené otvorené krivky, ohraničené počiatočným a koncovým bodom, potom množina $(E_{RF,AR}^v)_s = \emptyset$ pre $s = 1, 2, \dots, m$, množina $\mathbf{E}'_{RF,AR} \neq \emptyset$ a jednotlivé hranice sú tvorené množinou

$$(\mathbf{E}_{RF,B}^o)_r = [A_i \{x_i, y_i\}, \langle \{z_D\}_i, \{z_H\}_i \rangle]_{i=1}^{\infty}. \quad (44)$$

V takom prípade je celá skúmaná oblasť tvorená množinou

$$\mathbf{E}_{RF} = \bigcup_{i=1}^r (\mathbf{E}_{RF,B}^o)_i \cup \mathbf{E}'_{RF,AR}. \quad (45)$$



Obr. 7. Topografická plocha vrásového georeliéfu bez uzatvorených oblastí tvorených množinami $(E_{RF,B}^{i*})_i$ a jej zobrazenie v skalárnej báze.

$(E_{RF,B}^0)_i$ — množiny bodov tvoriace v skalárnej báze otvorené ohraničené krivky, v ktorých je skalárne pole výšok a jeho izočiarové (vrstvenicové) pole nespojité; na topografickej ploche georeliéfu im odpovedajú množiny $(E_{RF,B}^{i*})_i$ ($i = 1, 2, \dots$) tvoriace otvorené zvislé steny.

Každej množine z [38], [39], [41], [44] zodpovedá na topografickej ploche georeliéfu množina

$$(E_{RF,AR}^{i*})_s = [A_i^{**}(x_i, y_i, z_i)]_{i=1}^{\infty} \quad s = 1, 2, \dots, m \quad (46)$$

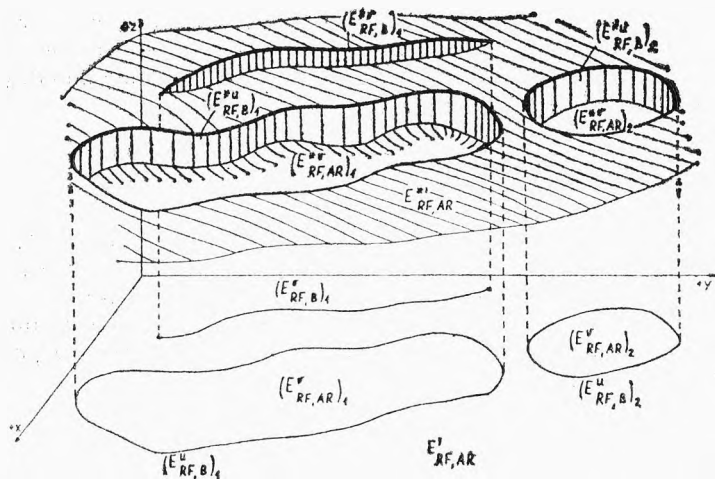
$$(E_{RF,B}^{i*})_s = [A_i^{**}(x_i, y_i), \langle (z_D)_i, (z_H)_i \rangle]_{i=1}^{\infty} \quad (47)$$

$$E_{RF,AR}^{i*} = [A_i^{**}(x_i, y_i, z_i)]_{i=1}^{\infty} \quad (48)$$

$$(E_{RF,B}^0)_r = [A_i^{**}(x_i, y_i), \langle (z_D)_i, (z_H)_i \rangle]_{i=1}^{\infty} \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (49)$$

Množinami $(E_{RF,B}^{i*})_s$ (47) sú na topografickej ploche tvorené uzatvorené zvislé steny, kdežto množinami $(E_{RF,B}^0)_r$ (49) sú na topografickej ploche tvorené neuzatvorené zvislé steny. Podrobne je tento problém rozobraný v práci [16].

Na obr. 6 je ilustratívne graficky vyjadrený vzájomný vzťah jednotlivých uvedených množín. Celá skúmaná oblasť z obr. 6 je v skalárnej báze tvorená množinou



Obr. 8. Topografická plocha, plocha georeliéfu s uzatvorenou depresiou oddelenou od ostatného okolia zvislou stenou a jej zobrazenie v skalárnej báze.

$$E_{RF} = \bigcup_{i=1}^5 (E_{RF,AR}^v)_i \cup E'_{RF,AR},$$

ktorej na topografickej ploche georeliéfu zodpovedá množina

$$E^*_{RF} = \bigcup_{i=1}^5 (E_{RF,AR}^{*v})_i \cup E'_{RF,AR}.$$

Obr. 6 schematicky ilustruje prípad tabuľového georeliéfu. Na obr. 7 je ilustratívne vyjadrený prípad, keď študovaná oblasť pozostáva v skalárnej báze z množín $(E_{RF,B}^o)_r$, $E'_{RF,AR}$, ktorým na topografickej ploche georeliéfu zodpovedajú množiny $(E_{RF,B}^o)_r$, $E''_{RF,AR}$. Množinami $(E_{RF,B}^o)_r$ sú na topografickej ploche tvorené neuzatvorené zvislé steny o výške

$$(\Delta z_{DH})_i = (z_H)_i - (z_D)_i$$

nad každým bodom $A'_i(x_i, y_i) \in E$ roviny (x, y) . Celková skúmaná oblasť z obr. 7 je v skalárnej báze tvorená množinou bodov E_{RF} , ktorej na topografickej ploche georeliéfu zodpovedá množina E^*_{RF} , kde

$$E_{RF} = \bigcup_{i=1}^4 (E_{RF,B}^o)_i \cup E'_{RF,AR}; \quad E^*_{RF} = \bigcup_{i=1}^4 (E_{RF,B}^{*o})_i \cup E''_{RF,AR}.$$

Uvedený opis platí aj pre uzatvorené depresie. Takýto prípad je ilustratívne graficky vyjadrený na obr. 8.

Funkcia (24) je v zmysle (32) spojitá buď v celej skúmanej oblasti skalárnej bázy, alebo v jej jednotlivých častiach tvorených množinami $(E_{RF,AR}^v)_s$.

$E'_{RF,AR}$. Oblasť, v ktorej je funkcia [24] spojité a spojitou diferencovateľná, nazvime oblasťou definície funkcie. V nej je funkcia spojitou diferencovateľná a v každom jej bode $A'_i \in E_{RF}$ taylorovsky rozvinuteľná. Jej funkcionálny determinant má v zmysle práce [21] tvar

$$I^2 = \begin{vmatrix} z_{xy} & z_{xx} \\ z_{yy} & z_{yy} \end{vmatrix} = z_{xy}^2 - z_{xx}z_{yy}. \quad (50)$$

Na základe Taylorovho rozvoja možno ku každému bodu $A'_i(x_i, y_i, z_i) \in E_{RF}$ skalárnej bázy, a teda aj bodu $A_i''(x_i, y_i, z_i) \in E'_{RF}$ topografickej plochy georeliéfu priradiť dve nekonečne malé okolia, ktoré sa koncentricky prekrývajú, pričom bod $A'_i \in E_{RF}$, resp. jemu zodpovedajúci bod $A_i'' \in E'_{RF}$ bude ich stredom (obr. 9). Obe okolia sú v zmysle práce [14] určené v ľubovoľnom bode $A'_i \in E_{RF}$, resp. v bode $A_i'' \in E'_{RF}$ rovnicami

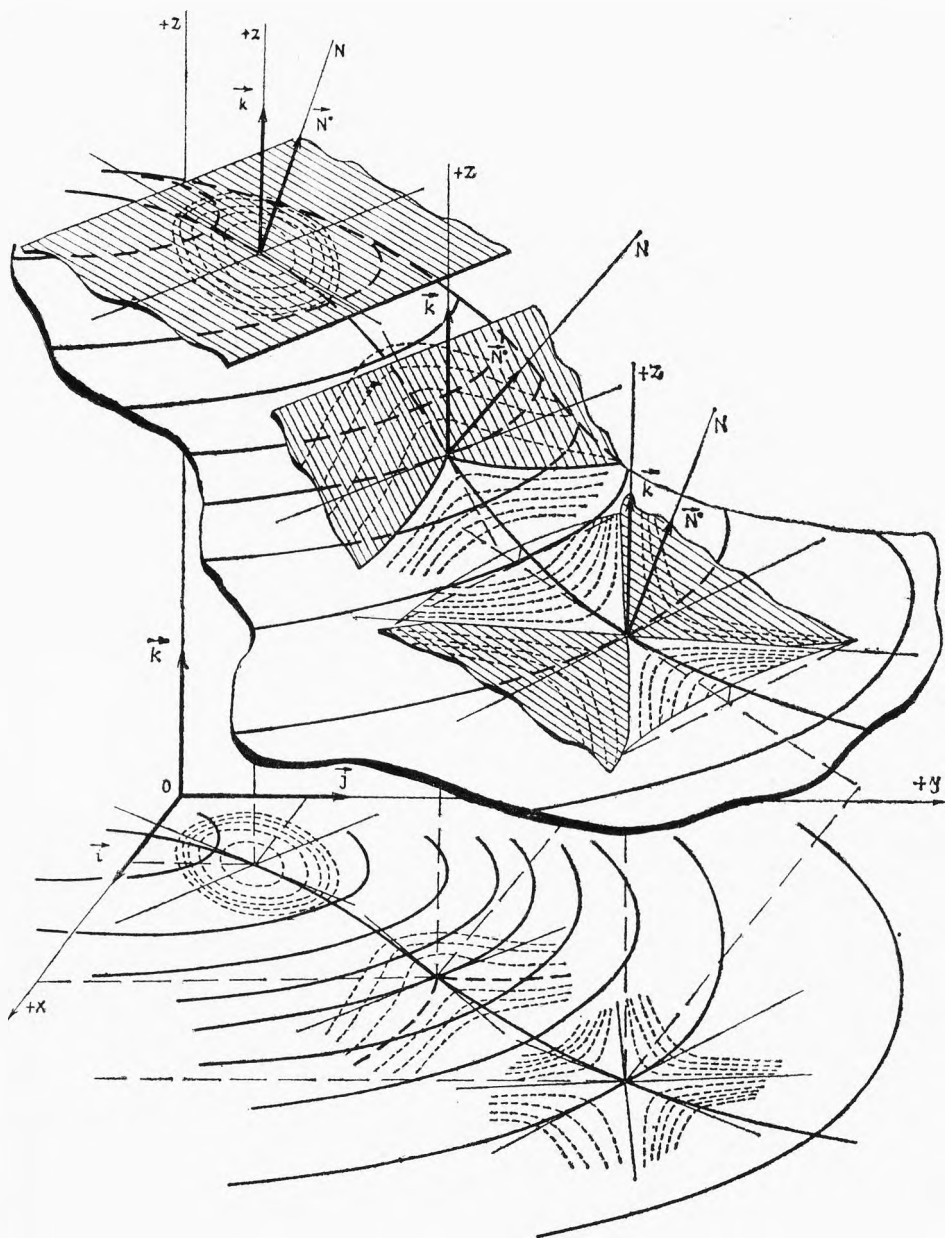
$$dz = z_x dx + z_y dy$$

$$Dz = dz + 1/2 d^2z = z_x dx + z_y dy + 1/2 [z_x dx^2 + 2 z_{xy} dx dy + z_{yy} dy^2], \quad (51)$$

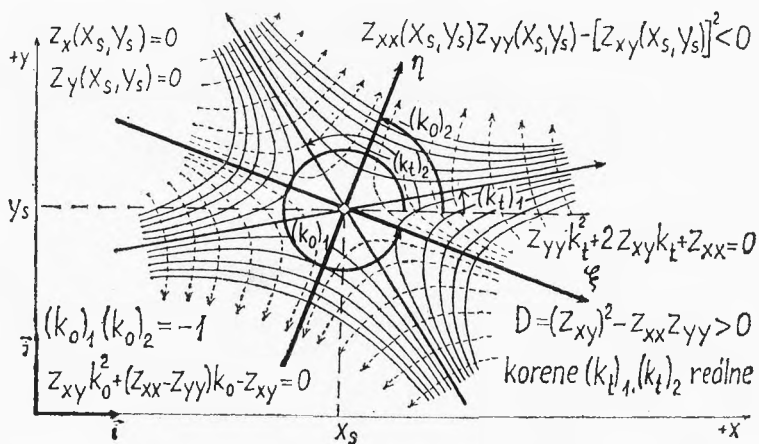
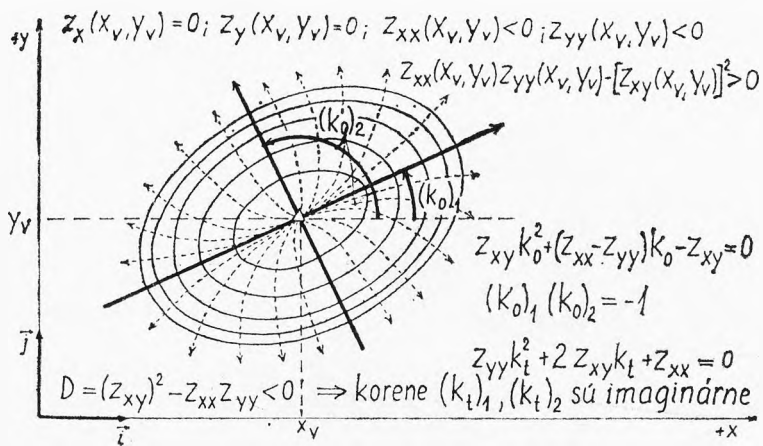
v ktorých sú hodnoty derivácií v každom bode $A'_i \in E_{RF}$, $A_i'' \in E'_{RF}$ jemu zodpovedajúcimi konštantami, t. j. $z_x(x_i, y_i) = \text{konšt.}$, $z_y(x_i, y_i) = \text{konšt.}$, ..., $z_{yy}(x_i, y_i) = \text{konšt.}$ a veličiny dx , dy , dz , Dz sú premennými. Prvá z rovníc (51) určuje podľa práce [20] tzv. lineárne okolie, v ktorom sú charakterizované tzv. priamkové elementy plochy (rovnica je vzhľadom na premenné dx , dy lineárna) a druhá rovnica v (51) určuje tzv. kvadratické okolie bodu A'_i , resp. A_i'' . Toto koncentricky prekrýva prvé — lineárne — okolie (podrobne pozri [21]), v ktorom sú charakterizované tzv. krivkové elementy plochy (rovnica je vzhľadom na premenné dx , dy kvadratická). Nás zaujíma druhé — kvadratické — okolie. Ak o ňom uvažujeme v karteziánskej súradnicovej sústave $\langle O', x', y', z' \rangle$, kde $O' \equiv A'_i$, resp. $O' \equiv A_i''$ je počiatok sústavy, os x' je dotyčnicou k vrstevnici v bode A'_i , A_i'' , y' je dotyčnicou k spádovej krivke topografickej plochy a $z' \equiv N$ s normálou k topografickej ploche, pričom premennú veličinu Dz považujeme za premenný parameter, potom pre každé $Dz = \text{konšt.}$ je druhou rovnicou určená kvadratická krivka (hyperbola, parabola, elipsa). V okolí každého bodu $A'_i \in E_{RF}$, $A_i'' \in E'_{RF}$ je tak určená sústava kriviek, a to buď hyperbol, parabol alebo elíps (obr. 9), podľa ktorých možno všetky body $A'_i \in E_{RF}$, $A_i'' \in E'_{RF}$ rozdeliť na eliptické, parabolické alebo hyperbolické.

Výsledne stručne uveďme, že zo štyroch základných geometrických foriem georeliéfu sú konvex-konvexné (vypuklo-vypuklé) formy $F_{XX} (\omega > 0, K_r > 0)$ a konkáv-konkávne (duto-duté) formy $F_{KK} (\omega < 0, K_r < 0)$ tvorené množinou eliptických bodov skalárneho poľa výšok a jeho topografickej plochy a konkáv-konvexné (duto-vypuklé) formy $F_{KX} (\omega < 0, K_r > 0)$, ako aj konvex-konkávne (vypuklo-duté) formy $F_{XX} (\omega > 0, K_r < 0)$ sú tvorené hyperbolickými bodmi.

V singulárnych izolovaných pozitívnych (vrcholových) bodoch $A'_v(x_v, y_v, z_v) \in E_{RF}$; $A_v''(x_v, y_v, z_v) \in E'_{RF}$, v singulárnych izolovaných negatívnych (depresných) bodoch a v singulárnych dvojných (sedlových) bodoch $A'_s(x_s, y_s, z_s) \in E_{RF}$, $A_s''(x_s, y_s, z_s) \in E'_{RF}$ je $z_x(x_{v,s}, y_{v,s}) = 0$, $z_y(x_{v,s}, y_{v,s}) = 0$, takže rovnice (51) sa zredukujú v týchto bodoch na rovnicu



Obr. 9. Eliptické parabolické a hyperbolické body na interpolačnej ploche skalárneho poľa výšok (na topografickej ploche georeliéfu) a v jej skalárnej báze s diferenciálne malými kvadratickými okoliami.



Obr. 10. Singulárny izolovaný bod pozitívny v skalárnej báze [vrcholový bod na topografickej ploche] a jeho diferenciálne malé kvadratické okolie — singulárny dvojný bod poľa v skalárnej báze [sedlový bod na topografickej ploche georeliéfu] a jeho diferenciálne malé kvadratické okolie.

$$Dz = 1/2 (z_{xx} dx^2 + 2 z_{xy} dx dy + z_{yy} dy^2). \quad (52)$$

V nich je dotyková rovina paralelná so skalárnou bázou (x, y) a normála k topografickej ploche je totožná s osou z , takže krivky v ich diferenciálne malých kvadratických okoliach určené rovnicou [52] sú totožné s vrstevnicami. Z rozboru rovnice [52] plynie, že vo vrcholových a depresných bodoch majú tvar koncentrických elíps a v sedlových bodoch majú tvar hyperbol [pozri obr. 10]. Podrobne je tento problém uvedený v prácach [6, 21].

Uvedme, že tieto singulárne body sú totožné so singulárnymi bodmi trajektórieového poľa, t. j. poľa spádových kriviek, avšak toto pole má v nich oproti izocharovému (vrstevnicovému) poľu odlišné vlastnosti.

Z vrcholových bodov sa spádové krivky rozbiehajú na všetky strany kolmo

na vrstevnice, v sedlových bodoch dve do nich vbiehaajú, dve z nich vybiehaajú a ostatné spádové krivky ich obchádzajú (obr. 10). Tie údolnicové spádové krivky, ktoré vybiehaajú zo sedlových bodov, sú rozhraničujúcimi krivkami, ktorými sú navzájom od seba oddelené jednotlivé singulárne oblasti. Centrom každej singulárnej oblasti je singulárny izolovaný pozitívny (vrcholový) bod, obr. 2. Každá singulárna oblasť má tak jednoznačne určený svoj systém spádových kriviek, z ktorých žiadna neprechádza do inej singulárnej oblasti.

Táto vlastnosť umožňuje potom opísať každú oblasť pomocou jednej matice, ktorej prvkami sú priesečníky spádových kriviek s vrstevnicami [4, 5, 6, 21]. Celá študovaná oblasť je potom opísaná toľkými maticami, z koľkých singulárnych oblastí pozostáva. Tieto matice sú vstupnými maticami pre KDMR ako jeden z jeho možných vstupov [4, 5, 14].

Rozdelenie študovanej oblasti do singulárnych oblastí je však dôležité aj z hľadiska nepravidelného diskrétného bodového poľa výšok tvoreného konečnou množinou bodov ${}_D\mathbf{E}_{RF} \subset \mathbf{E}_{RF}$. V množine \mathbf{E}_{RF} možno z hľadiska singulárnych oblastí v skalárnej báze rozlíšiť podmnožinu \mathbf{E}_{RF}^U , ktorej prvkami sú body tvoriace rozhraničujúce údolnice a podmnožiny $(\mathbf{E}_{RF}^{Sg})_j$, ktorých prvkami sú vnútorné body každej singulárnej oblasti, takže celá množina vnútorných bodov singulárnych oblastí je $\mathbf{E}_{RF}^{Sg} = \bigcup_{j=1}^m (\mathbf{E}_{RF}^{Sg})_j$. Potom

$$\mathbf{E}_{RF} = \bigcup_{j=1}^m (\mathbf{E}_{RF}^{Sg})_j \cup \mathbf{E}_{RF}^U \text{ a } \mathbf{E}_{RF}^* = \bigcup_{j=1}^m (\mathbf{E}_{RF}^{Sg'})_j \cup \mathbf{E}_{RF}^{*U}, \quad (53)$$

každá i -ta singulárna oblasť je tak jednoznačne určená množinou bodov $(\mathbf{E}_{RF}^{Sg})_j$ a je ohrančená podmnožinou bodov $(\mathbf{E}_{RF}^U)_j$.

PRIMÁRNE DISKRÉTNE BODOVÉ POLE — PDBP-VÝŠOK A JEHO PRIMÁRNA TROJUHOĽNÍKOVÁ SIĚŤ (PTS). MODELOVANIE GEORELIÉFU POMOCOU KDMR.

Vyjadrenie skalárneho poľa výšok a jeho topografickej plochy v tvare množín (38) až (41) a v tvare (53) je dôležité z hľadiska jeho modelovania pomocou samočinných počítačov. Skalárne pole ľubovoľne zvolenej oblasti je vždy zadané v tvare reprezentatívneho diskrétného bodového poľa, ktoré tvorí v skalárnej báze vstupnú konečnú množinu ${}_D\mathbf{E}_{RF} \subset \mathbf{E}_{RF}$. Na topografickej ploche georeliéfu jej zodpovedá množina ${}_D\mathbf{E}_{RF}^* \subset \mathbf{E}_{RF}^*$, kde

$${}_D\mathbf{E}_{RF} = \bigcup_{j=1}^m ({}_D\mathbf{E}_{RF}^{Sg})_j \cup \mathbf{E}_{RF}^U; \quad {}_D\mathbf{E}_{RF}^* = \bigcup_{j=1}^m ({}_D\mathbf{E}_{RF}^{*Sg})_j \cup {}_D\mathbf{E}_{RF}^{*U}. \quad (54)$$

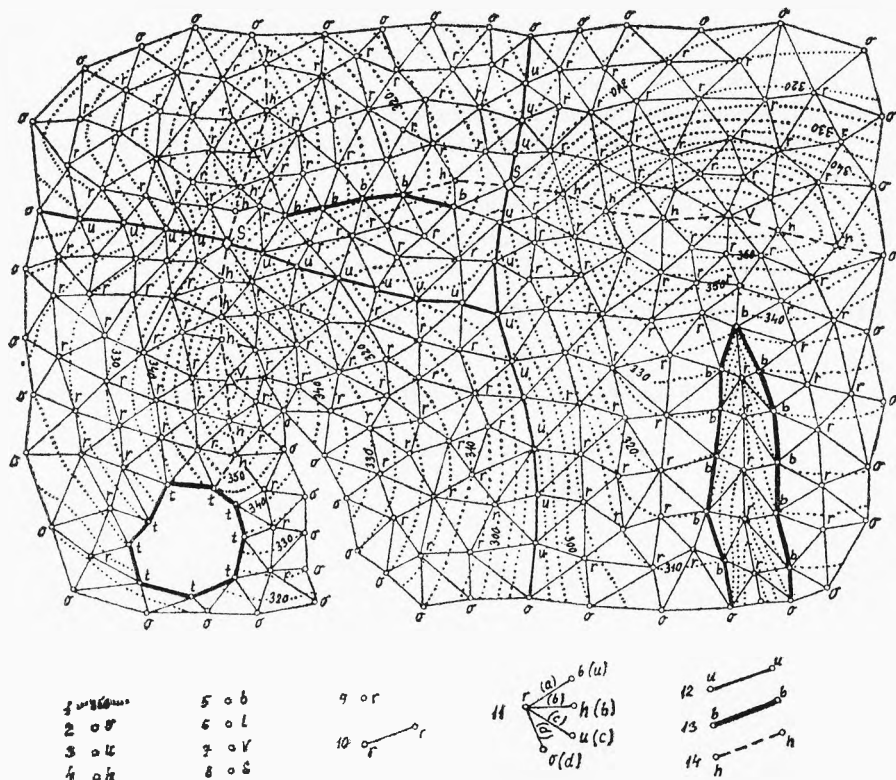
Každá singulárna oblasť Sg_j je tak jednoznačne určená jej reprezentatívnu konečnou množinou vnútorných bodov

$$({}_D\mathbf{E}_{RF}^{Sg})_j = [A'_i(x_i, y_i, z_i)]_{i=1}^m; \quad ({}_D\mathbf{E}_{RF}^{*Sg})_j = [A_i^*(x_i, y_i, z_i)]_{i=1}^m \quad (55)$$

pre každé jedno $j = 1, 2, \dots, n$ a konečnou podmnožinou príslušných ohraničujúcich bodov

$$({}_D\mathbf{E}_{RF}^U)_j = [A'_i(x_i, y_i, z_i)]_{i=1}^r; \quad ({}_D\mathbf{E}_{RF}^{*U})_j = [A_i^*(x_i, y_i, z_i)]_{i=1}^r. \quad (56)$$

To je graficky vyjadrené na obr. 11. Zadávané body sú prítom významovo rozlíšené pomocou alfabetických, numerických, príp. alfanumerických kódov, z ktorých pre názornosť z metodického hľadiska uvieme alfabetické kódové rozlíšenie: **v** — singularne izolované body pozitívne, **s** — singularne dvojné body poľa, **h** — chrbáticové body PDBP, **u** — údolnicové body PDBP, **b** — body PDBP na terénnych hranách, **r** — regulárne body PDBP, **t** — body PDBP vyme-



Obr. 11. Reprezentatívne primárne diskrétné bodové pole (PDBP) s primárnou trojuholníkovou sieťou (PTS) spojitého skalárneho poľa výšok a jeho izočiarového (vrstevnicového) poľa:

1 — vrstevnice, 2 — ohraničujúce body PDBP s priradeným kódom, 3 — údolnicové body PDBP, 4 — chrbáticové body PDBP, 5 — body PDBP na terénnych hranách, 6 — body vymedzujúce izolované „ostrov“, 7 — singularne izolované body pozitívne (vrcholové body), 8 — singularne dvojné body poľa (sedlové body), 9 — regulárne body PDBP, 10 — strany trojuholníkov medzi regulárnymi bodmi PDBP, 11 — regulárne strany trojuholníkov (11a — s jedným bodom na terénnej hrane, 11b — s jedným bodom na chrbátici, 11c — s jedným bodom na rozhraničujúcej údolnici, 11d — s jedným bodom na ohraničujúcom bode), 12 — strany trojuholníkov PTS na rozhraničujúcich údolniciach, 13 — strany trojuholníkov na terénnych hranách, 14 — strany trojuholníkov na chrbáticiach.

družúce izolované oblasti ako „ostrov“, σ — ohraničujúce body PDBP, ktoré ohraničujú zadanú oblasť.

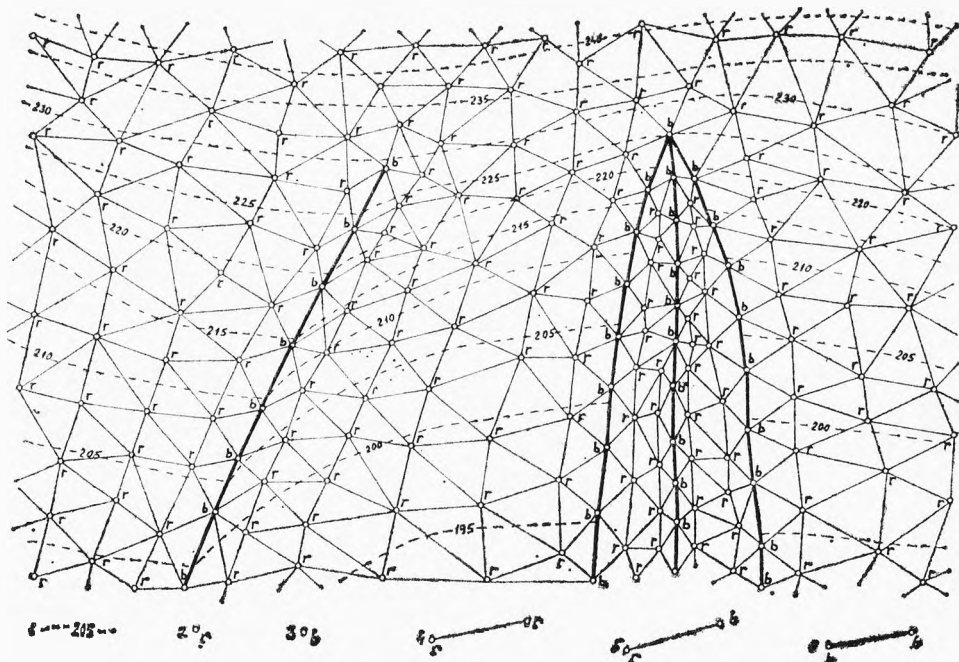
Počet rozlišovacích kódov závisí od charakteru spracovávanej oblasti.

Vstupná množina bodov PDBP musí byť vzhľadom na možné uvedenie vlastností skalárneho poľa výšok rozlíšená aj na konečné podmnožiny $\{D E_{RF,AR}^V\}_s$, $\{D E_{RF,B}^u\}_s$, $\{D E_{RF,B}^o\}_i$, $D E'_{RF,AR}$, ktoré sú podmnožinami množín

$$\begin{aligned} \{D E_{RF,AR}^V\}_s &\subset \{E_{RF,AR}^V\}_s; \{D E_{RF,B}^u\}_s \subset \{E_{RF,B}^u\}_s \\ \{D E_{RF,B}^o\}_i &\subset \{E_{RF,B}^o\}_i; D E'_{RF,AR} \subset E'_{RF,AR}. \end{aligned} \quad (57)$$

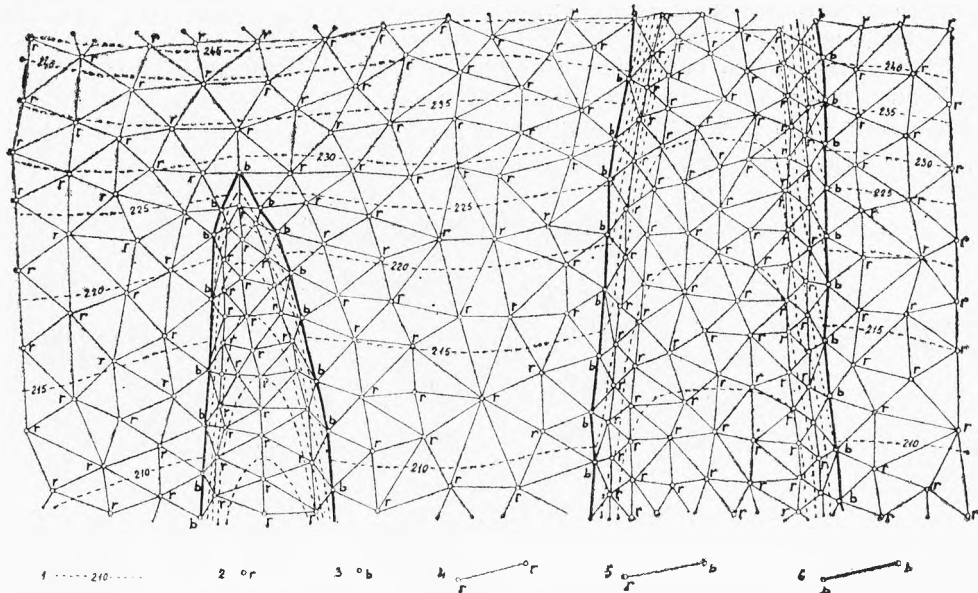
Týmto množinám zodpovedajú na topografickej ploche georeliéfu množiny

$$\begin{aligned} \{D E_{RF,AR}^{*u}\}_s &\subset \{E_{RF,AR}^{*u}\}_s; \{D E_{RF,B}^{*u}\}_s \subset \{E_{RF,B}^{*u}\}_s \\ \{D E_{RF,B}^{*o}\}_i &\subset \{E_{RF,B}^{*o}\}_i; D E'_{RF,AR} \subset E'_{RF,AR}. \end{aligned} \quad (58)$$



Obr. 12. Primárne diskrétné bodové pole (PDBP) a jeho primárna trojuholníková sieť (PTS) — priebeh trojuholníkovej siete na terénnych hranách:

1 — vrstevnice, 2 — regulárne body PDBP, 3 — body PDBP na terénnych hranách, 4 — strany trojuholníkov PTS medzi regulárnymi bodmi PDBP, 5 — regulárne strany trojuholníkov PTS s jedným regulárnym bodom PDBP a s jedným bodom PDBP na terénnej hrane, 6 — strany trojuholníkov PTS na terénnych hranách.



Obr. 13. Primárne diskrétné bodové pole (PDBP) a jeho primárna trojuholníková sieť (PTS) v oblasti výmoľov a ich okolia; vysvetlivky ako v obr. 12.

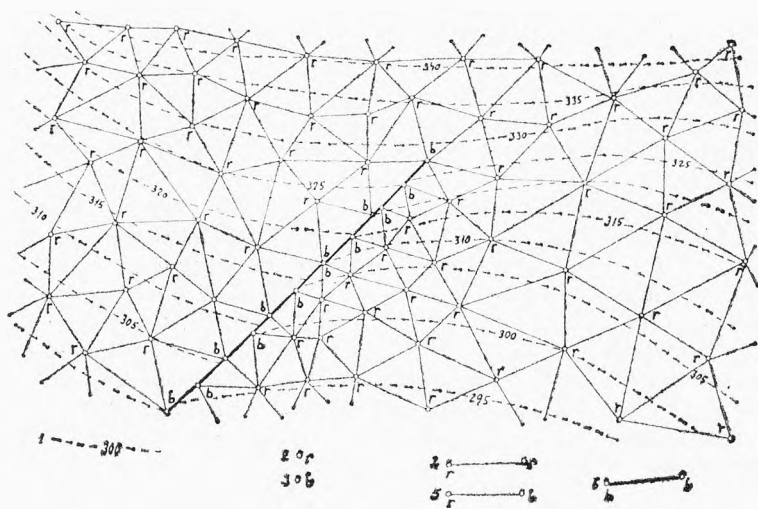
Body jednotlivých množín [57] sú navzájom od seba významovo odlišné pomocou už uvedených kódov. Takéto rozlíšenie bodov PDBP, ich rozloženie v skalárnej báze a priebeh trojuholníkov PTS na terénnych hranách rôznych druhov je graficky vyjadrené na obr. 12, obr. 13. Body PDBP a trojuholníky PTS na obr. 12 sú situačne zobrazené k obr. 3 a PDBP z obr. 13 sa situačne vzťahuje k obr. 4.

Lokalizácia bodov PDBP a priebeh trojuholníkovej siete pre oblasti zvislých stien na topografickej ploche, ktoré sa v skalárnej báze zobrazia ako krivky, sú ilustratívne graficky vyjadrené na obr. 14. PDBP na obr. 14 je zobrazené k obr. 5.

Takto formulované PDBP výšok je vstupným súborom pre modelovanie topografickej plochy georeliéfu, a teda aj pre jej morfometrickú analýzu pomocou KDMR. Teoretická koncepcia KDMR [pozri práce [6, 10, 11, 14]] je volená tak, aby bolo možné realizovať jednak morfometrickú analýzu georeliéfu so súčasnými kartografickými výstupmi a jednak rad aplikačných interdisciplinárnych úloh.

Osobitnú úlohu majú v KDMR rôzne interpolačné postupy. V publikovaných prácach [4, 6, 10, 11] bola z nich traktovaná hlavne lineárna interpolácia, výpočet morfometrických parametrov reliéfu funkciou jednej premennej a maticový zápis georeliéfu s následnými interpolačnými postupmi. V práci [4] boli však rozpracované aj interpolačné postupy funkciou dvoch premenných polynomickeho typu tretieho a štvrtého stupňa.

Avšak tým, že sa z hľadiska výpočtovej techniky ako najjednoduchšia zauží-



Obr. 14. Primárne diskkrétne bodové pole (PDBP) a jeho primárna trojuholníková sieť (PTS) — priebeh trojuholníkovej siete na terénnych hranách zobrazujúcich zvislé steny; vysvetlivky ako v obr. 12.

vala lineárna interpolácia na základe vopred zadaného reprezentatívneho PDBP, viackrát bol KDMR chybné stotožnený s lineárnou interpoláciou.

Pritom však sám výpočet formou interpolácie prezentuje v KDMR síce dôležitý, ale z celkového spektra len úzky okruh problémov. Pritom výpočet nie je v KDMR koncepcne viazaný len na lineárnu interpoláciu, ale je v ňom použiteľný ktorýkoľvek ďalší postup. Pre úplnosť uvedme, že pre KDMR bolo na SHMÚ Bratislava, Centrum pre rádiolokačnú a kozmickú meteorológiu Malý Javorník, programovo vypracovaných E. Mičietovou a kol. šesť druhov interpolácie:

- lineárna interpolácia funkciou jednej premennej,
 - nelineárna interpolácia polynómom tretieho stupňa jednej premennej,
 - nelineárna interpolácia polynómom dvoch premenných tretieho stupňa,
 - nelineárna interpolácia spline-funkciou dvoch premenných polynomického typu druhého stupňa,
 - nelineárna interpolácia spline-funkciou dvoch premenných polynomického typu tretieho stupňa,
 - nelineárna interpolácia spline-funkciou tenkej platne dvoch premenných.
- Posledný spôsob interpolácie a jej programové spracovanie realizovala veľmi podrobne zároveň H. Mitášová [20].

Poznamenajme, že KDMR je pre rôzne druhy interpolácií systémom otvoreným.

Ťažiskom KDMR je však výpočet morfometrických parametrov a morfometrická analýza georeliéfu ako priestorovo organizovaného subsystému $S_{RF}(P')$ krajiny.

Morfometrickú analýzu georeliéfu možno vo zvolenej mierke v zásade vykonať dvoma spôsobmi.

Prvým z nich je jednoznačné určenie veľkosti každého jedného morfometrickeho parametra ako prvku usporiadanej množiny $G_{RF}(P')$ (25) v každom jednom bode $A_i''(x_i, y_i, z_i) \in E_{RF}^*$, výpočet priestorového rozloženia vzájomných závislostí medzi jednotlivými hodnotami a kartografické vyjadrenie hodnôt. Pri tomto spôsobe sa teda vypočítané a kartograficky vyjadrené hodnoty morfometrických parametrov jednoznačne vzťahujú vždy k jednotlivým bodom $A_i'' \in E_{RF}^*$, resp. $A_i' \in E_{RF}$.

Druhým spôsobom morfometrickej analýzy, ktorý je bežný a veľmi rozšírený, je stanovenie priemerných hodnôt jednotlivých morfometrických parametrov z množiny $G_{RF}(P')$, kde každý jeden parameter ako prvok množiny $G_{RF}(P')$ je štatistickou veličinou, ktorá sa vzťahuje buď k celému zobrazovaciemu priestoru, alebo k jeho jednotlivým vymedzeným oblastiam. Pri tomto spôsobe sa teda veľkosti jednotlivých morfometrických parametrov nevzťahujú jednoznačne k jednotlivým bodom $A_i'' \in E_{RF}^*$, resp. $A_i' \in E_{RF}$ ako v prvom spôsobe, ale každá jednotlivá vypočítaná veľkosť sa ako štatistická veličina vzťahuje vždy k nejakej podmnožine bodov z množiny E_{RF} , E_{RF}^* , ktorá tvorí na každej vymedzenej oblasti štatistický súbor.

My sme koncepcne realizovali prvý spôsob, lebo tento je vhodný na výpočet vplyvu georeliéfu na priestorovú diferenciáciu procesov v krajine.

Poznamenajme však, že na základe údajov získaných týmto prvým spôsobom možno realizovať aj druhý spôsob, pretože množinu E_{RF} , E_{RF}^* s vypočítanými a priradenými morfometrickými parametrami z množiny $G_{RF}(P)$ možno zároveň chápať ako štatistický súbor pre výpočet priemerných hodnôt. Nie je však možný opačný postup, pretože pri druhom spôsobe sa v zmysle už uvedeného každá jedna vypočítaná veličina vzťahuje vždy k celej množine E_{RF}^* , E_{RF} alebo k jej jednotlivým podmnožinám, ale nie k jednému bodu $A_i'' \in E_{RF}^*$, $A_i' \in E_{RF}$.

ZÁVER

Pre exaktnú morfometrickú analýzu georeliéfu je potrebné poznať matematické vlastnosti funkcie (24), ktorá je matematickým modelom topografickej plochy georeliéfu bez parametra času. Tento model vyjadruje georeliéf len pre určitý časový interval $\Delta T_{PK} = 50, 100, 150$ rokov, ktorého dĺžka závisí od miery a rozlišovacej úrovne. Štruktúrne vlastnosti funkcie (24) vyjadrujú štruktúrne vlastnosti georeliéfu ako plochy. Matematické vlastnosti funkcie (24) sú zároveň odkladom pre priestorové rozloženie a hustotu bodov PDBP a jeho PTS. Sú obsiahnuté aj vo vnútornej štruktúre KDMR.

Priestorové rozloženie hodnôt morfometrických parametrov a ich vzájomné vzťahy možno pomocou KDMR získať s vopred stanovenou presnosťou vzhľadom na zvolenú mierku a rozlišovaciu úroveň [4, 6, 10, 12, 14].

Na základe aplikačných programov možno pomocou KDMR získať údaje o priestorovom rozložení vplyvu georeliéfu na procesy v krajine.

KDMR bol v uvedenej koncepcii realizovaný ako integrálna súčasť geoinformačného systému geografického typu METEOSYS na SHMÚ Bratislava, Centrum pre rádiolokačnú a kozmickú meteorológiu [12, 19]. Koncepciu tohto systému načrtne v samostatnej práci.

Teraz iba poznamenajme, že v súčasnej dobe je v geoinformačnom systéme METEOSYS realizovaný E. Mičietovou [12, 19] programový systém KDMR na

výpočet hodnôt všetkých morfometrických parametrov množiny $G_{RF}(P')$ (25) a ich priestorovej diferenciácie, pričom sú zároveň z hľadiska potrieb SHMÚ realizované nasledovné aplikačné programové moduly:

- programový modul na výpočet množstva dopadajúceho priameho slnečného žiarenia na jednotku topografickej plochy georeliéfu pre ľubovoľný deň v roku, a to jednak bez vplyvu oblačnosti a jednak s vplyvom oblačnosti,
- výpočet priestorovej diferenciácie a časového rozdelenia dopadajúceho slnečného žiarenia a jeho automatizované kartografické zobrazenie s rozkladom na farby,
- programový modul na výpočet časovej a uhlovej dynamiky oslnenia georeliéfu a jej priestorovej diferenciácie,
- programový modul na výpočet priestorového perspektívneho zobrazenia georeliéfu a dynamiky oslnenia georeliéfu z ľubovoľne zadaného stanoviska pozorovateľa,
- programový modul na výpočet profilov na reliéfe v ľubovoľne zadanom smere letovej trasy,
- ďalšie programové moduly špeciálneho zamerania.

Koncepcia KDMR ako integrálnej súčasť geoinformačného systému METEOSYS uvedená v práci [12] je volená tak, že KDMR je z hľadiska interdisciplinárnych aplikácií a z nich vyplývajúceho rozpracovávaní programových modulov s plným využitím všetkých informácií METEOSYS-u systémom otvoreným.

Pomocou KDMR je však možné realizovať výpočet nielen vplyvu georeliéfu na priestorovú diferenciáciu interakcie atmosféry a hydrosféry, ako je to uvedené v práci [12], ale na základe existencie geoinformačného systému geografického typu je možné realizovať a kartograficky modelovať aj vplyv georeliéfu na priestorovú diferenciáciu procesov v celej geografickej sfére ako priestorovo organizovaného systému $S_G(P, T)$. Preto geografický informačný systém nemožno v komplexnosti realizovať bez toho, že by v ňom nebol ako jeho integrálna súčasť zároveň obsiahnutý aj KDMR s úplným programovým systémom.

LITERATÚRA

1. ARMAND, D. L.: Nauka o landšafte. Vyd. Mysl, Moskva 1975, 1—293. — 2. DEMEK, J., ZEMAN, J.: Typy reliéfu Země. ACADEMIA Praha 1979, 1—323. — 3. GERASIMOV, I. P., MEŠČERJAKOV, J. A.: Relief zemli. Izd. Nauka, Moskva 1967, 311. — 4. HAVERLÍK, I., KRCHO, J.: Mathematical Generalisation of Forming Isoline Thematic Maps by Computer exemplified by Morphometric Analysis of Relief and Dynamic of Relief Insolation. Acta Geogr. Univ. Com., Geogr. physica, Nr. 1, SPN Bratislava 1973, 237—425. — 5. KRCHO, J.: Zostrojenie máp časovej a uhlovej dynamiky oslnenia reliéfu graficko-numerickej spôsobom a pomocou samočinných počítačov. Geogr. čas. SAV, XXII, č. 3, Bratislava 1970, 205—245. — 6. KRCHO, J.: Morphometric Analysis of Relief on the Basis of Geometric Aspect of Field Theory. Acta geogr. UC, Geogr. phys. Nr. 1, Bratislava 1973, 1—233. — 7. KRCHO, J.: Štruktúra a priestorová diferenciácia fyzicko-geografickej sféry ako kybernetického systému. Geogr. čas. SAV, XXVI, č. 2, Bratislava 1974, 133—162. — 8. KRCHO, J.: Mapa ako abstraktný kartografický model S_K geografickej krajiny ako reálneho priestorového systému S_G . Geogr. čas. SAV, XXXIII, č. 3, Bratislava 1981, 244—272. — 9. KRCHO, J.: Mapa a štruktúra jej obsahu z hľadiska teórie systémov. Geodet. a kartogr. obzor, 1981 27, č. 1, 8—16. — 10. KRCHO, J.: Teoretická koncepcia a interdisciplinárne aplikácie komplexného digitálneho modelu reliéfu pri modelovaní dvojdimenzionálnych polí. Geogr. čas. SAV, XXXV, č. 3, Bratislava 1983, 285—291.

11. KRCHO, J.: Teoretická koncepcia komplexného digitálneho modelu reliéfu. Acta FRN UC, Geographica Nr 23, Bratislava 1984, 67—100. — 12. KRCHO, J. a kol.: Diaľková detekcia zrážok a dynamický model prírodného prostredia. Št. výsk. úloha II—S—1—02, SHMÚ — Centrum pre rádiolokačnú a kozmickú meteorológiu na Malom Javorníku, Bratislava 1985, 1—412. — 13. KRCHO, J.: Dĺžka oslnenia reliéfu a jeho znázornenie do mapy pomocou izalumchróm. Geogr. čas. SAV, XVII, 3, 1965, 216—237. — 14. KRCHO, J.: Reliéf ako priestorový subsystém S_{RF} geografickej krajiny a jeho komplexný digitálny model. Geogr. čas. SAV, 31, 3, 1979, 237—262. — 15. KRCHO, J.: Geometrické formy georeliéfu a ich hierarchické úrovne. Geogr. čas. SAV, 38, č. 2—3, 1986, 210—235. — 16. KRCHO, J.: Morfometrická analýza georeliéfu a jeho komplexný digitálny model. Vyd. VEDA Bratislava [rukopis]. — 17. MIČIAN, E.: Morfogeografia: geografický prístup k predmetu geomorfológie. Fol. foac. sc. nat. Univ. Purkynianae Brunensis T. XIV, Geographia 9, Op. 13, 1973, 27—33. — 19. MIČIETOVÁ, E.: Automatizovaný systém komplexného digitálneho modelu reliéfu ako súčasť geoinformačných systémov. Kand. diz. práca, PFUK, Bratislava 1984. — 20. MITÁŠOVÁ, H.: Kartografické aspekty počítačového modelovania povrchov ako špeciálnych subsystémov geografickej sféry. Kand. diz. práca, SvF SVŠT Bratislava 1985.

21. ŠALAMON, B.: Das typische Isoliniengrundfeld und seine Anwendung. Studia geoph. et geodet., 7, 2—4, 1963, 93—107, 313—329.

Йозеф Крхо

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ГЕОРЕЛЬЕФА С АСПЕКТОВ МОРФОМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ЕЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСРЕДСТВОМ КОМПЛЕКСНОЙ ЦИФРОВОЙ МОДЕЛИ

В статье рассматривается проблема георельефа в ландшафте. Рассматривается его место и роль в ландшафте и его влияние на пространственную дифференциацию геоэкологических процессов в ландшафте. Анализируется проблема георельефа как объекта и предмета исследований разных научных дисциплин. Рассматривается характер георельефа как поверхности и ее отношение к ее материальным носителям — к литосфере и педосфере. Сделан набросок взаимоотношений геометрических и генетических форм георельефа.

Далее приводится дефиниция георельефа, рассмотрены его роль и место в ландшафте. Рассматриваются характеристики морфометрических параметров и геометрических форм, их взаимоотношения и их влияние на пространственную дифференциацию процессов в ландшафте.

Рассматриваются в статье также математические свойства двухмерного скалярного поля высот и его интерпретационной поверхности — топографической поверхности георельефа в масштабе 1:М. Дается характеристика этих свойств по отношению к дискретному репрезентационному полю высот как исходного комплекта данных для моделирования георельефа посредством его комплексной цифровой модели (КЦМР). Рассмотрена проблема непрерывности и прерывности топографической поверхности георельефа и ее скалярного поля и ее воздействия для охарактеризования исходного комплекта дискретного поля точек, которыми (свойствами) это поле должно обладать с аспектов моделирования георельефа.

Рис. 1. Разные различительные уровни георельефа.

Рис. 2. Непрерывное скалярное поле высот, его изолинейное (изогипсовое) поле совместно с полем линий максимального уклона и его сингулярные области.

- 1 — горизонтали, 2 — грани рельефа, 3 — изолированные сингулярные положительные (вершинные) точки, 4 — двойные сингулярные (седловинные) точки, 5 — разграничивающие линии тальвегов (водосливные линии отделяющие отдель-

ные сингулярные области друг от друга), 6 — хребтовые линии, 7 — линии максимального уклона, 8 — линии оконтуровывающие исследуемый участок.

Рис. 3. Горизонтали и линии максимального уклона изотипсового поля и линии максимального уклона на гранях рельефа — грань рельефа с промоиной и без промоины. 1 — горизонтали, 2 — линии максимального уклона, 3 — грани рельефа.

Рис. 4. Горизонтали и линии максимального уклона на гранях рельефа, промоины-овраги с непрерывными горизонталями — овраг с закругленным дном и овраг с широким плоским дном.

1 — горизонтали, 2 — линии максимального уклона, 3 — грани рельефа.

Рис. 5. Горизонтали и линии максимального уклона на гранях рельефа с нарушением непрерывности скалярного поля высот и его изолинейного (изогипсового) поля — отвесные стены в георельефе и в его топографической поверхности.

1 — горизонтали, 2 — линии максимального уклона, 3 — грани рельефа, представляющая собой отвесную стену в топографической поверхности георельефа.

Рис. 6. Топографическая поверхность плоского георельефа со скальными стенами и ее отображение в скалярной основе.

$(E_{RF,AR}^v)_i$, $(i = 1, 2, \dots, 5)$ — множества точек, образующие замкнутые ареалы, в которых скалярное поле и его изолинейное (изогипсовое) поле является непрерывным и им отвечающие множества $(E_{RF,AR}^v)_i$ на топографической поверхности георельефа.

$(E_{RF,B}^u)_i$ — множества точек, образующие в скалярной основе замкнутые кривые, отделяющие в скалярной основе (x, y) замкнутые области (ареалы) от их окрестностей. Скалярное поле в множествах $(E_{RF,B}^u)_i$ является прерывным и на топографической поверхности этим множествам отвечает отвесные стены, выражаемые множествами $(E_{RF,B}^u)_i$.

$E_{RF,AR}$ — множество точек, образующих окрестности множеств $(E_{RF,AR}^v)_i$. В этом множестве скалярное поле и его изолинейное (изогипсовое) поле являются непрерывными; на топографической плоскости этому множеству отвечает множество $E_{RF,AR}^{**}$.

Рис. 7. Топографическая поверхность складчатого георельефа без замкнутых ареалов образованных множествами $(E_{RF,B}^v)_i$ и ее отображение в скалярной основе.

$(E_{RF,B}^o)_i$ — множества точек, образующие в скалярной основе незамкнутые ограничивающие кривые, на которых скалярное поле высот и его изолинейное (изогипсовое) поле является прерывным; на топографической поверхности георельефа им отвечают множества $(E_{RF,B}^o)_i$, $(i = 1, 2, \dots)$, образующие незамкнутые отвесные стены.

Рис. 8. Топографическая поверхность, поверхность георельефа с замкнутой депрессией, отделенной от остальных окрестностей отвесной стеной и ее отображение в скалярной основе.

Рис. 9. Эллиптические, параболические и гиперболические точки на интерполяционной поверхности скалярного поля высот (на топографической поверхности георельефа) и в ее скалярной основе с дифференциально (бесконечно) малыми квадратическими окрестностями точек.

Рис. 10. Сингулярная изолированная позитивная точка в скалярной основе (вершина на топографической поверхности) и ее дифференциально малая квадратическая окрестность — сингулярная двойная точка поля в скалярной основе (седловина на топографической поверхности георельефа) и ее дифференциально малая квадратическая окрестность.

Рис. 11. Репрезентативное примарное дискретное поле точек (ПДПТ) с примарной сетью треугольников (ПСТ) непрерывного скалярного поля высот и его изолинейного (изогипсового) поля.

1 — горизонтали, 2 — ограничивающие точки ПДПТ с прикрепленным к ним

кодом, 3 — точки линии тальвега ПДПТ, 4 — хребтовые точки ПДПТ, 5 — точки ПДПТ на гранях рельефа, 6 — точки выделяющие изолированные „острова“, 7 — сингулярные изолированные позитивные точки (вершины), 8 — сингулярные двойные точки поля (седловины), 9 — регулярные точки ПДПТ, 10 — стороны треугольников между регулярными точками ПДПТ, 11 — регулярные стороны треугольников (11a — с одной точкой на грани рельефа, 11b — с одной точкой на хребтовой линии, 11c — с одной точкой на разграничивающей линии тальвега, 11d — с одной точкой на ограничивающей точке), 12 — стороны треугольников ПСТ на разграничивающих линиях тальвегов, 13 — стороны треугольников на гранях рельефа, 14 — стороны треугольников на хребтовых линиях.

Рис. 12. Примарное дискретное поле точек (ПДПТ) и его примарная сеть треугольников (ПСТ) — вид сети треугольников на гранях рельефа.

1 — горизонтали, 2 — регулярные точки ПДПТ, 3 — точки ПДПТ на гранях рельефа, 4 — стороны треугольников ПСТ между регулярными точками ПДПТ, 5 — регулярные стороны треугольников ПСТ с одной регулярной точкой ПДПТ и с одной точкой ПДПТ на грани рельефа, 6 — стороны треугольников ПСТ на гранях рельефа.

Рис. 13. Примарное дискретное поле точек (ПДПТ) и его примарная сеть треугольников (ПСТ) на местности с промоинами-оврагами.

Легенда см. рис. 12.

Рис. 14. Примарное дискретное поле точек (ПДПТ) и его примарная сеть треугольников (ПСТ). Вид сети треугольников на грани рельефа — отвесной стене.

Легенда см. рис. 12.

Перевод: Л. Правдова

Jozef Krcho

MATHEMATICAL PROPERTIES OF THE TOPOGRAPHICAL SURFACE OF GEORELIEF FROM THE VIEWPOINT OF MORPHOMETRIC ANALYSIS AS WELL AS MODELLING BY MEANS OF A COMPLEX DIGITAL MODEL

The problem of georelief in a landscape is outlined in the paper. Its position and role in a landscape are outlined as well as its influence on the spatial differentiation of geocological processes in a landscape. The problem of georelief as an objective and subject of study in various scientific disciplines is analyzed. The nature of georelief as a surface and its relation to its material bearer — to the lithosphere and pedosphere is characterized. Geometric and genetic forms correlating in the georelief are outlined.

A definition of georelief is given, its role and position in the landscape as well. Morphometric parameters and geometric forms, their mutual relationships as well as their influence on spatial differentiation of processes in the landscape are characterized.

Mathematical properties of the bidimensional scalar field of altitudes and of its interpolation surface — the topographical surface of georelief at a scale of 1:million are outlined. A characteristic of these properties is given in relation to discrete representative point field of altitudes as an input set for modelling the georelief by means of its complex digital model (KDMR). The problem of continuity and discontinuity of the georelief topographical surface and its scalar field are analyzed as well as its consequences for the characteristics of properties of the input set of discrete point field, which are to be fulfilled by this field from the viewpoint of modelling.

Fig. 1. Various differentiating levels of the course of georelief.

- Fig. 2. A continuous scalar field of altitudes, its isoline (contour-line) field with a field of gradient curves as well as its singular areas:
 1 — contour lines, 2 — terrain edges, 3 — singular isolated positive points (summit points), 4 — singular double points (saddle points), 5 — dividing valley lines (lines dividing individual singular areas from each other), 6 — ridge lines, 7 — gradient curves, 8 — bounding lines of the area studied.
- Fig. 3. The course of contour lines and gradient curves of a contour line field and a gradient-curve field on terrain edges — a terrain edge without and with a gully:
 1 — contour lines, 2 — gradient curves, 3 — terrain edges.
- Fig. 4. The course of contour lines and gradient curves on terrain edges, gullies with continuous course of contour lines — a gully with a rounded bottom and a gully with an extensive flat bottom:
 1 — contour lines, 2 — gradient curves, 3 — terrain edges.
- Fig. 5. The course of contour lines and gradient curves on terrain edges with disturbed continuity of the scalar field of altitudes and of its isoline (contour-line) field — wales on the georelief and on its topographical surface.
 1 — contour lines, 2 — gradient curves, 3 — a terrain edge in the map, representing a wall on the topographical surface of georelief.
- Fig. 6. The topographical surface of a table georelief with rock walls and its representation in the scalar basis.
 $\{E_{RF,AR}^v\}_i$, ($i = 1, 2, \dots, 5$) — point sets forming both closed areas, in which both the scalar field and its isoline (contour-line) field are continuous and sets $\{E_{RF,AR}^v\}_i$ corresponding to them on the topographical surface of georelief.
 $\{E_{RF,B}^u\}_i$ — point sets forming in the scalar basis closed curves separating in the scalar basis (x, y) closed areas from their neighbourhoods. The scalar field is discontinuous in these sets $\{E_{RF,B}^u\}_i$, vertical walls expressed by sets $\{E_{RF,AR}^u\}_i$ corresponding to them on the topographical surface of georelief.
 $E'_{RF,AR}$ — a set of points forming the neighbourhood of sets $\{E_{RF,AR}^v\}_i$. In this set the scalar field and its isoline (contour-line) field are continuous; a set $E''_{RF,AR}$ corresponds to it on the topographical surface.
- Fig. 7. The topographical surface of a foiled georelief without closed areas formed by sets $\{E_{RF,B}^v\}_i$ and its representation in the scalar basis.
 $\{E_{RF,B}^o\}_i$ — point sets forming in the scalar basis open bounded curves, in which both the scalar field of altitudes and its isoline (contour-line) field are discontinuous; sets $\{E_{RF,B}^o\}_i$ ($i = 1, 2, \dots$) forming open vertical walls correspond to them on the topographical surface of georelief.
- Fig. 8. A topographical surface, the surface of georelief with a closed depression separated from the other neighbourhood by a vertical wall and its representation in the scalar basis.
- Fig. 9. Elliptic, parabolic and hyperbolic points on the interpolation surface of the scalar field of altitudes (on the topographical surface of georelief) and with differentially small quadratic neighbourhoods in its scalar basis.
- Fig. 10. A singular isolated positive point in the scalar basis (a summit point on the topographical surface) and its differentially small quadratic neighbourhood — a singular double point of the field in the scalar basis (a saddle point on the topographical surface of georelief) and its differentially small quadratic neighbourhood.
- Fig. 11. A representative primary discrete point field (PDBP) with the primary triangular network (PTS) of a continuous scalar field of altitudes and of its isoline (contour-line) field:
 1 — contour lines, 2 — bounding points of PDBP with a code co-ordinated,

3 — valley-line points of PDBP, 4 — ridge-line points of PDBP, 5 — terrain edge points, 6 — points delimitating isolated „islands“, 7 — singular isolated positive points (summit points), 8 — singular double points of the field (saddle points), 9 — regular points of PDBP, 10 — sides of triangles between regular points of PDBP, 11 — regular sides of triangles (11a — with one point on the terrain edge, 11b — with one point on the ridge line, 11c — with one point on the dividing valley line, 11d — with one point on a bounding point), 12 — sides of PTS on dividing valley lines, 13 — sides of triangles on terrain edges, 14 — triangle sides on ridge lines.

Fig. 12. The primary discrete point field (PDBP) and its primary triangular network (PTS) — the course of triangular network on terrain edges:

1 — contour lines, 2 — regular points of PDBP, 3 — points of PDBP on terrain edges, 4 — sides of triangles of PTS between regular points of PDBP, 5 — regular sides of triangles of PTS with one regular point of PDBP and with one point of PDBP on the terrain edge, 6 — sides of triangles of PTS on terrain edges.

Fig. 13. The primary discrete point field (PDBP) and its primary triangular network (PTS) in an area of gullies and of their neighbourhoods; explanations identical with those to Fig. 12.

Fig. 14. Primary discrete point field (DPBP) and its primary triangle network (PTS) course of the triangle network on terrain edges representing vertical walls; explanations 1. 2. 3. ... identical with those to Fig. 12.

Translated by A. K r a j č í r