

## Vplyv doby splatnosti a kupónovej sadzby obligácie na zmenu jej teoretickej ceny pri zmene úrokovej sadzby na kapitálovom trhu

Vincent ŠOLTĚS\*

### Influence of the Coupon Rate and Maturity Period of Coupon Obligation on its Theoretical Price at the Change of Interest Rate on the Capital Market

#### Abstract

*This paper deals with the influence of coupon rate and maturity period of coupon obligation on its theoretical price alteration at the variation of interest rate on the capital market. It is proved, that the lower coupon rate is, the more sensitive on the variation of interest rate on the capital market the obligation is.*

*On the other hand, it is shown, that the statement which says that the higher mature period is, the more sensitive on the variation of interest rate on the capital market the obligation is, is not generally valid. In theory, there are some obligations, for which this statement is not valid and there are examples of such obligations in this paper. There is also the condition found, under which the statement is valid. It can be seen, that obligations for which the statement is not valid, can not be found in practice, so it can be used in practical investment.*

**Key words:** coupon rate, duration, price sensibility, maturity period

**JEL Classification:** C41, D14, G31

#### Úvod

V trhovej ekonomike ceny tovarov určuje trh na základe ponuky a dopytu. Napriek tomu má pre manažérov portfólia obsahujúcom obligácie, ale aj pre individuálnych investorov význam *teoretická cena obligácie*. Ak uvažujeme kupónovú obligáciu s nominálnou hodnotou  $F$ , kupónovou sadzbou  $r$ , dobou splatnosti obligácie  $n$  a požadovanou mierou výnosu  $i$ , potom pre teoretickú cenu takejto obligácie platí známy vzťah

---

\* prof. RNDr. Vincent ŠOLTĚS, CSc., Technická univerzita v Košiciach, Ekonomická fakulta, Katedra financií, Némcevej 32, 040 01 Košice; e-mail: vincent.soltes@tuke.sk

$$V = \sum_{t=1}^n \frac{F \cdot r}{(1+i)^t} + \frac{F}{(1+i)^n} \quad (1)$$

Požadovaná miera výnosu  $i$  závisí priamo úmerne najmä od reálnych úrokových sadziieb na kapitálovom trhu a od rizikovosti danej obligácie.

Zo vzťahu (1) vyplýva, že ak úrokové sadzby na kapitálovom trhu budú klesať, ceny obligácií budú rásť, a naopak, ak úrokové sadzby na kapitálovom trhu budú rásť, ceny obligácií budú klesať. Teoreticky je toto tvrdenie vždy pravdivé, pretože vo vzťahu (1) je úroková sadzba iba v menovateli, a teda vplyva na teoretickú cenu obligácie nepriamo úmerne. Praktickým potvrdením tejto tézy v podmienkach Slovenska sú výnosy dlhopisových korunových podielových fondov v predminulom roku (výrazný pokles úrokových sadziieb a veľmi slušné výnosy dlhopisových korunových podielových fondov), ale aj v minulom roku (malý pokles úrokových sadziieb a aj malé výnosy dlhopisových korunových podielových fondov).

Zaujímavou otázkou je, aký vplyv má doba splatnosti obligácie na zmenu jej teoretickej ceny pri zmene úrokových sadziieb. V ekonomickej literatúre, napríklad [1, s. 251], sa možno stretnúť s tvrdením, že obligácie s dlhšou dobou splatnosti majú väčšie percentuálne zmeny ceny pri zmene úrokovej sadzby na kapitálovom trhu ako obligácie s kratšou dobou splatnosti.

Cieľom nášho príspevku je ukázať, že toto často deklarované tvrdenie nemá všeobecnú platnosť. Na druhej strane dokážeme, že v drvivej väčšine prípadov naozaj platí. Presnejšie povedané, nájdeme podmienku postačujúcu na platnosť tohto tvrdenia, ktorá je pri konkrétnych obligáciách väčšinou splnená.

Ďalším – v ekonomickej literatúre často uvádzaným – tvrdením, opäť napríklad [1, s. 251], je, že obligácie s menšou kupónovou sadzbou majú väčšiu percentuálnu zmenu teoretickej ceny pri zmene úrokovej sadzby na kapitálovom trhu ako obligácie s väčšou kupónovou sadzbou. V našom príspevku dokážeme, že toto tvrdenie platí vždy.

## 1. Príklad obligácií dokazujúci neplatnosť daného tvrdenia

Uvažujme obligácie s nominálnou hodnotou  $F = 1000$ , kupónovou sadzbou  $r = 0,02$  a dobami splatnosti  $n_1 = 10$ ,  $n_2 = 25$ ,  $n_3 = 30$ ,  $n_4 = 35$ ,  $n_5 = 40$ ,  $n_6 = 50$ ,  $n_7 = 70$  a  $n_8 = 80$  rokov. Ak predpokladáme, že úroková sadzba poklesne z hodnoty  $i_1 = 0,1$  na hodnotu  $i_2 = 0,08$ , potom teoretické ceny pri daných úrokových sadzbách, ako aj ich percentuálne zmeny sa prejavajú tak, ako sú uvedené v tabuľke 1.

Z tabuľky 1 je zrejmé, že nie vždy je naozaj pravda, že obligácia s dlhšou dobou splatnosti je citlivejšia na zmenu úrokových sadziieb ako obligácia s kratšou

dobou splatnosti. Naopak vidíme, že v tomto prípade sú obligácie s dobou splatnosti 35 a viac rokov menej citlivé na pokles úrokových sadzieb ako obligácia s dobou splatnosti 30 rokov.

T a b u ľ k a 1

| Doba splatnosti $n$<br>obligácie | Teoretická cena $V_1$<br>obligácie pri $i_1 = 0.1$ | Teoretická cena $V_2$<br>obligácie pri $i_2 = 0.08$ | Percentuálna zmena ceny<br>$\frac{V_2 - V_1}{V_1} \cdot 100\%$ |
|----------------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 10                               | 508.4344                                           | 597.3947                                            | 17.497                                                         |
| 25                               | 273.8368                                           | 359.5135                                            | 31.287                                                         |
| <b>30</b>                        | <b>245.8469</b>                                    | <b>324.5330</b>                                     | <b>32.006</b>                                                  |
| 35                               | 228.4673                                           | 300.7259                                            | 31.627                                                         |
| 40                               | 217.6760                                           | 284.5232                                            | 30.709                                                         |
| 50                               | 206.8115                                           | 265.9909                                            | 28.615                                                         |
| 70                               | 201.0130                                           | 253.4308                                            | 26.077                                                         |
| 80                               | 200.3905                                           | 251.5891                                            | 25.549                                                         |

V ďalšej časti práce nájdeme podmienku, pri splnení ktorej uvedené tvrdenie – t. j. tvrdenie, že obligácia s dlhšou dobou splatnosti má väčšiu percentuálnu zmenu teoretickej ceny pri zmene úrokovej sadzby na kapitálovom trhu ako obligácia s kratšou dobou splatnosti – je pravdivé. Táto časť práce je náročnejšia a vyžaduje od čitateľa istý stupeň matematických znalostí.

## 2. Postačujúca podmienka pre platnosť tvrdenia, že obligácie s dlhšou dobou splatnosti sú citlivejšie na zmenu úrokovej sadzby ako obligácie s kratšou dobou splatnosti

Známe je tvrdenie, že kritériom citlivosti zmeny teoretickej ceny obligácie pri zmene trhovej úrokovej sadzby je *durácia*. Čím väčšia je durácia obligácie, tým je táto obligácia citlivejšia na zmenu trhovej úrokovej sadzby. Tvrdenie, že čím dlhšia je doba splatnosti obligácie, tým je obligácia citlivejšia na zmenu trhovej úrokovej sadzby, bude teda určite platiť pre tie obligácie, pre ktoré bude splnená

$$\text{podmienka } \frac{\partial D}{\partial n} \geq 0$$

Keďže durácia  $D$  je definovaná vzťahom

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot \frac{F r}{(1+i)^t} + n \cdot \frac{F}{(1+i)^n}}{V} \quad (2)$$

nie je možné tento vzťah použiť na výpočet parciálnej derivácie durácie podľa doby splatnosti  $n$ . V práci [4] je však odvodený iný vzorec na výpočet durácie, a to

$$D = \frac{1}{i} \left[ \frac{(1+i)^{n+1} + n i \left( \frac{i}{r} - 1 \right) - (1+i)}{(1+i)^n + \frac{i}{r} - 1} \right] \quad (3)$$

Použitím tohto vzťahu máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial n} &= \frac{1}{i} \left[ \frac{\left[ (1+i)^{n+1} \ln(1+i) + i \left( \frac{i}{r} - 1 \right) \right] \left[ (1+i)^n + \frac{i}{r} - 1 \right] - \left[ (1+i)^{n+1} + n i \left( \frac{i}{r} - 1 \right) - (1+i) \right] (1+i)^n \ln(1+i)}{\left[ (1+i)^n + \frac{i}{r} - 1 \right]^2} \right] = \\ &= \frac{1}{i} \left[ \frac{(1+i)^{n+1} \left( \frac{i}{r} - 1 \right) \ln(1+i) + (1+i)^n i \left( \frac{i}{r} - 1 \right) + i \left( \frac{i}{r} - 1 \right)^2 - n i \left( \frac{i}{r} - 1 \right) (1+i)^n \ln(1+i) + (1+i)^{n+1} \ln(1+i)}{\left[ (1+i)^n + \frac{i}{r} - 1 \right]^2} \right] = \\ &= \frac{1}{i} \left[ \frac{(1+i)^{n+1} \frac{i}{r} \ln(1+i) - (1+i)^n i \left( \frac{i}{r} - 1 \right) [n \ln(1+i) - 1] + i \left( \frac{i}{r} - 1 \right)^2}{\left[ (1+i)^n + \frac{i}{r} - 1 \right]^2} \right] = \\ &= \frac{1}{i} \left[ \frac{(1+i)^n \left[ (1+i) \frac{i}{r} \ln(1+i) - \frac{i^2}{r} n \ln(1+i) + \frac{i^2}{r} + i n \ln(1+i) - i \right] + i \left( \frac{i}{r} - 1 \right)^2}{\left[ (1+i)^n + \frac{i}{r} - 1 \right]^2} \right] = \\ &= \frac{1}{i} \left[ \frac{(1+i)^n \left[ n \left( 1 - \frac{i}{r} \right) \ln(1+i) + (1+i) \frac{i}{r} \ln(1+i) + \frac{i^2}{r} - i \right] + i \left( \frac{i}{r} - 1 \right)^2}{\left[ (1+i)^n + \frac{i}{r} - 1 \right]^2} \right] = \\ &= \frac{(1+i)^n \left[ n \left( 1 - \frac{i}{r} \right) \ln(1+i) + \frac{1+i}{r} \ln(1+i) + \frac{i}{r} - 1 \right] + \left( \frac{i}{r} - 1 \right)^2}{\left[ (1+i)^n + \frac{i}{r} - 1 \right]^2} \end{aligned}$$

Z posledného vzťahu vyplýva, že ak  $i \leq r$ , potom  $\frac{\partial D}{\partial n} > 0$  pre každé  $n$ . Ak je teda kupónová sadzba aspoň na úrovni požadovaného výnosu  $i$ , potom obligácia s dlhšou dobou splatnosti je vždy citlivejšia na zmenu úrokových sadzieb ako obligácia s kratšou dobou splatnosti.

Ak  $i > r$ , potom  $\frac{\partial D}{\partial n}$  môže byť aj záporná, a to vtedy, ak

$$n \left( 1 - \frac{i}{r} \right) \ln(1+i) + \frac{(1+i)}{r} \ln(1+i) + \frac{i}{r} - 1 + \frac{\left( \frac{i}{r} - 1 \right)^2}{(1+i)^n} < 0, \text{ teda ak}$$

$$\frac{\left( \frac{i}{r} - 1 \right)^2}{(1+i)^n} < n \left( \frac{i}{r} - 1 \right) \ln(1+i) + 1 - \frac{i}{r} - \frac{(1+i)}{r} \ln(1+i) \quad (4)$$

Analýzou podmienky (4) sa dá zistiť, že aj keď  $i > r$ , pre malé  $n$  podmienka neplatí. Začína platiť až pri dostatočne veľkom  $n_1$  a potom už platí pre každé  $n \geq n_1$ . Len pre obligácie s dobou splatnosti väčšou ako je  $n_1$  nastáva situácia, že obligácie s väčšou dobou splatnosti sú menej citlivé na zmenu úrokovej sadzby ako obligácie s menšou dobou splatnosti. V reálnej praxi sa však také obligácie takmer nevyskytujú. Ak sa vrátíme k nášmu príkladu, potom zistíme, že podmienka (4) platí až pre  $n = 30$ , preto obligácie s dobou splatnosti 35, 40, 50, 70, 80 sú stále menej citlivé na zmenu úrokovej sadzby, čo vyplýva z tabuľky 1.

### 3. Vplyv kupónovej sadzby obligácie na citlivosť zmeny teoretickej ceny pri zmene úrokovej sadzby na kapitálovom trhu

Ďalším známym tvrdením je, že obligácie s menšou kupónovou sadzbou sú citlivejšie na zmenu úrokových sadzieb ako obligácie s väčšou kupónovou sadzbou. Dokážeme, že toto tvrdenie má všeobecnú platnosť. K dôkazu opäť využijeme duráciu obligácie, avšak v tomto prípade je vhodnejší vzťah (2). Stačí dokázať, že prvá parciálna derivácia durácie  $D$  podľa kupónovej sadzby  $r$  je záporná, lebo to znamená, že durácia je klesajúcou funkciou kupónovej sadzby. Zo vzťahu (2) máme

$$D = \frac{1 \cdot \frac{Fr}{1+i} + 2 \cdot \frac{Fr}{(1+i)^2} + \dots + n \cdot \frac{Fr}{(1+i)^n} + n \cdot \frac{F}{(1+i)^n}}{\frac{Fr}{1+i} + \frac{Fr}{(1+i)^2} + \dots + \frac{Fr}{(1+i)^n} + \frac{F}{(1+i)^n}} =$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{1+i} + 2 \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + n \cdot \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{n}{r} \cdot \frac{1}{(1+i)^n}}{\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{(1+i)^n}} = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot \frac{1}{(1+i)^t} + \frac{n}{r} \cdot \frac{1}{(1+i)^n}}{\sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{(1+i)^n}}$$

odkiaľ

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial r} &= \frac{-\frac{n}{r^2} \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \left( \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \right) - \left( \sum_{t=1}^n t \cdot \frac{1}{(1+i)^t} + \frac{n}{r} \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \right) \left( -\frac{1}{r^2 \cdot (1+i)^n} \right)}{\left[ \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \right]^2} = \\ &= \frac{-\frac{1}{r^2 \cdot (1+i)^n} \left( \sum_{t=1}^n \frac{n-t}{(1+i)^t} + \frac{n}{r} \cdot \frac{1}{(1+i)^n} - \frac{n}{r} \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \right)}{\left[ \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \right]^2} = \frac{-\frac{1}{r^2 \cdot (1+i)^n} \cdot \sum_{t=1}^n \frac{n-t}{(1+i)^t}}{\left[ \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \right]^2} < 0 \end{aligned}$$

teda durácia je naozaj klesajúcou funkciou kupónovej sadzby. Čím je teda kupónová sadzba menšia, tým je jej durácia väčšia, a teda obligácia je citlivejšia na zmenu ceny pri zmene úrokovej sadzby.

## Záver

Touto teoretickou úvahou sme splnili dva ciele.

Dokázali sme, že vo všeobecnosti neplatí tvrdenie, že obligácia s dlhšou dobou splatnosti je citlivejšia na zmenu ceny pri zmene úrokovej sadzby na kapitálovom trhu. Súčasne sme ale ukázali, že pre obligácie, kde  $r > i$ , toto tvrdenie platí. Ak  $r < i$ , potom to platí po isté  $n_1$  (dostaneme ho z podmienky (4)) a až pre obligácie s dobou splatnosti väčšou, ako je spomínané  $n_1$ , to neplatí. Keďže v reálnej praxi je takýchto obligácií zanedbateľné množstvo, toto pravidlo je možné investorom odporučiť.

Ďalej sme dokázali, že vždy je pravda, že obligácia s menšou kupónovou sadzbou je citlivejšia na zmenu úrokovej sadzby na kapitálovom trhu ako obligácia s väčšou kupónovou sadzbou.

## Literatúra

- [1] HRVOLOVÁ, B.: Analýza finančných trhov. Bratislava: SPRINT vfra 2001.
- [2] MARKOVIČ, P.: Durácia a portfólio cenných papierov. Burza, 2000, č. 6, s. 46 – 48.
- [3] ŠOLTÉS, V. – PENJAK, V.: Finančná matematika. Košice: Košická tlačiarenská, a. s. 2003.
- [4] ŠOLTÉS, V.: Durácia kupónovej obligácie ako kritérium cenovej citlivosti obligácie vzhľadom na cenu úrokových sadzieb. Ekonomický časopis/Journal of Economics, 52, 2004, č. 1, s. 108 – 114.