

Entropiu maximalizujúce modely v regionálnej analýze

Ján PAULOV*

Entropy Maximizing Models in Regional Analysis

Abstract

The basic objective of this paper is to bring an overview on some research potentialities of entropy maximizing models in regional analysis, the discipline analysing spatial organisation of society on the regional level. The first part of the paper brings basic information on entropy as a concept of science: in classical (phenomenological) thermodynamics, in statistical mechanics (thermodynamics) and in information theory. In the second part the concept of maximum entropy and its relevance is discussed, particularly in statistical mechanics and information theory. A special attention (in the second part of the paper) is paid to maximizing entropy in the derivation of the distribution models in statistical mechanics using Boltzmann's entropy and to Jayne's „maximum entropy principle“ enabling the derivation of these models by maximizing Shannon's entropy. The third part of the paper demonstrates how the entropy maximizing models can be used in regional analysis.

Key words: *entropy maximizing models, regional analysis, information theory, distribution models*

JEL Classification: C15, R15, R58

Úvod

Regionálna analýza je bádateľská oblasť presekávajúca regionálnu ekonomiku, regionálnu a humánnu, resp. ekonomickú geografiu, príp. ďalšie disciplíny. Jej úlohou je analyzovať priestorové (teritoriálne) usporiadanie ľudskej spoločnosti, vrátane jej hospodárstva, podľa regiónov, na regionálnej úrovni. Pri tejto analýze uplatňuje predovšetkým matematické nástroje a postupy. Typické pre ňu

* prof. RNDr. Ján PAULOV, DrSc., Univerzita Komenského, Prírodovedecká fakulta, Katedra regionálnej geografie, ochrany a plánovania krajiny, Mlynská dolina B1, 842 15 Bratislava 4; e-mail: paulov@fns.uniba.sk

je matematické modelovanie. Jeden typ matematických modelov, ktorý bol rozvinutý koncom 60. a začiatkom 70. rokov dvadsiateho storočia, ale ktorý doznáva intenzívny rozvoj až do súčasnosti a ktorý našiel mimoriadne rozsiahle uplatnenie, je typ, ktorý všeobecne dostal názov *entropiu maximalizujúce modely*. Účelom tohto príspevku je poskytnúť istý prehľad o vedeckom základe týchto modelov a poukázať na možnosti ich použitia v regionálnej analýze.

Entropia ako vedný koncept

Je málo vedných konceptov, ktoré od svojho vzniku doznali takú reformuláciu, reinterpretáciu, také obohacovanie, a zároveň takú aplikáciu ako práve entropia. Je známe, že tento pojem má svoje domovské právo vo fyzike, špeciálne v termodynamike a „zrodil sa“ v súvislosti s formuláciou druhého termodynamického zákona (druhej termodynamickvej vety). Nemecký fyzik R. Clausius, ktorý je „zodpovedný“ za jeho zavedenie (r. 1865), definuje entropiu ako stavovú funkciu systému, ktorej prírastok dS , možno vyjadriť nasledovne: $dS \geq dQ/T$, kde dQ je množstvo tepla, ktoré systém obdržal, a T je absolútna teplota systému (vyjadrená v Kelvinovej stupnici), pri ktorej systém toto množstvo tepla obdržal. Ak je systém uzavretý (izolovaný), potom $dQ = 0$, takže $dS \geq 0$, čo je aj stručné matematické vyjadrenie druhého termodynamického zákona. Prípad, keď $dS = 0$, platí pre reverzibilné, prípad, keď $dS > 0$, pre ireverzibilné procesy [6]. Druhý termodynamický zákon, označovaný často práve ako entropický, tak ukazuje, akým smerom sa uberajú prírodné procesy. Chápanie a aplikácia entropie v zmysle klasickej (fenomenologickej) termodynamiky však nebudú predmetom ďalších úvah v tomto príspevku, hoci toho času už existuje celý rad štúdií, ktoré poukazujú na jej relevanciu v ekonomike; iniciátorom v tomto smere sa stala kniha N. Georgescu-Roegeny [3].

Novú formuláciu a interpretáciu nadobudol pojem *entropia* v štatistickej mechanike (termodynamike). Pre túto disciplínu je charakteristické štúdium systémov zložených z veľkého množstva častíc (napr. molekúl plynu), v správaní ktorých vystupuje do popredia prvok náhody. Keďže správanie jednotlivých častíc je za takýchto okolností ťažko popísateľné (v tom zmysle ako to robila klasická mechanika), štatistická mechanika pristúpila k popisu správania celého súboru častíc ako k určitému spriemerovanému správaniu, t. j. uplatnila pri popise štatistický prístup, v ktorom dôležitú úlohu hrá zákon veľkých čísel. V súlade s takýmto prístupom možno entropiu, S , uzavretého (izolovaného) systému zapísať nasledovne: $S = k \ln W$, kde k je Boltzmannova konštanta (molekulová konštanta tzv. ideálneho plynu) a W tzv. štatistická pravdepodobnosť, nazývaná aj *váha stavu*, ktorú za určitých predpokladov (týkajúcich sa charakteru častíc) možno

vyjadriť ako $W = m! / \prod_i m_i!$, kde m je celkový počet častíc v študovanom systéme a m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) je počet častíc v stave i . Autorom tejto formulácie entropie je rakúsky fyzik L. E. Boltzmann (sedemdesiate roky 19. storočia). Štatistická mechanika (termodynamika), ako vidno, na rozdiel od klasickej termodynamiky, chápe entropiu na hlbšej, mikroskopickej úrovni, a zároveň, ako sme už spomenuli, v štatistickom zmysle, čím sa tento pojem istým spôsobom vymanil z rýdzo fyzikálneho „zovretia“ a stal sa potenciálne aplikovateľným aj mimo rámca fyziky. Už aj na pôde štatistickej mechaniky častá interpretácia entropie ako miery deorganizácie naznačuje, že je to tak.

Tretia základná formulácia a interpretácia entropie sa objavila v súvislosti so vznikom teórie informácie a má tvar $H = -k \sum_i p_i \ln p_i$, kde H je entropia, $k > 0$

konštanta (ktorej hodnota závisí od použitej miery informácie) a p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) pravdepodobnosť výskytu, realizácie správy. Tento výraz, ktorého autorom je americký inžinier a matematik C. E. Shannon (r. 1948), vyjadruje priemerné množstvo informácie nesené jednou správou, resp. priemernú neurčitost' pripadajúcu na jednu správu. Preto sa Shannonova informačná entropia často nazýva aj *mierou neurčitosti*. O informácii a neurčitosti sa hovorí z toho dôvodu, že teória informácie chápe informáciu práve ako odstránenú neurčitost'; koľko neurčitosti sa odstránilo, toľko informácie sa získalo.

Hoci výrazy pre entropiu v štatistickej mechanike a v teórii informácie sa môžu zdať celkom odlišné, navzájom nesúvisiace, nie je to tak. Ak zavedieme relatívnu početnosť $f_i = m_i/m$ a uplatníme tzv. Stirlingovu aproximáciu pre veľké m_i , t. j. $m_i! \approx m_i \ln m_i - m_i$, potom výraz pre entropiu v štatistickej mechanike, $S = k \ln W$, možno prepísať ako $S = -km \sum_i f_i \ln f_i$, resp. $S/m = -k \sum_i f_i \ln f_i$. Ak pripustíme, že $f_i = p_i$, budú oba výrazy, t. j. štatisticko-mechanický a informačno-teoretický, okrem konštánt, formálne identické. O úplnej identite však nemožno hovoriť, pretože pri odvodzovaní Shannonovej informačnej entropie nebolo potrebné použiť Stirlingovu aproximáciu, a navyše, pojem pravdepodobnosti v Shannonovej entropii sa nemusí chápať len ako relatívna početnosť, ale vo všeobecnejšom zmysle.

Maximalizácia entropie

Už z nadpisu tohto príspevku vyplýva, že v ňom zohráva dôležitú úlohu koncept maximalizácie či maximálnej entropie. Uzavretý (izolovaný) termodynamický systém, či už ide o klasickú alebo štatistickú termodynamiku, speje k stavu maximálnej entropie. To znamená, že takýto systém, ak už dosiahne tento

stav, nie je schopný vykonávať prácu, hoci aj disponuje energiou. Štatistická termodynamika (mechanika) však ide aj v tomto smere ďalej než klasická termodynamika a kladie si otázku, aké bude rozdelenie častíc za stavu maximálnej entropie. Rozdelenie častíc do (energetických) stavov (hladín) i ($i = 1, 2, \dots, n$), ktoré má kardinálny význam pre túto disciplínu, odvodzuje sa práve od stavu maximálnej entropie. Aby takéto rozdelenie bolo možné odvodiť, je teda potrebné maximalizovať entropiu, t. j. výraz $S = k \ln W$, resp. $W = m! / \prod_i m_i!$ (pretože

z matematického vedie maximalizácia oboch výrazov k rovnakému výsledku), avšak za určitých, presne špecifikovaných podmienok. Ak je fixovaná celková energia systému a ak je zároveň fixovaný celkový počet častíc systému, potom tieto podmienky možno zapísať nasledovne: $\sum_i m_i \epsilon_i = E$ a $\sum_i m_i = m$, kde ϵ_i

je energia častice a E celková energia systému. Ak teda S , resp. W je maximalizované za týchto podmienok, ktoré teraz fungujú ako ohraničenia naložené na maximalizačný postup, potom výsledné rozdelenie bude mať nasledovný tvar:

$$m_i = (m/Z) e^{-\beta \epsilon_i}, \text{ kde } Z = \sum_i e^{-\beta \epsilon_i} \text{ je tzv. partičná funkcia (v štatistickej me-}$$

chanike mimoriadne dôležitá) a β parameter rozdelenia, ktorý možno stanoviť (odhadnúť) na základe prvého ohraničenia. Uvedený výraz je v štatistickej mechanike známy ako Maxwellovo-Boltzmannovo rozdelenie [2]. Je možné ďalej prijímať rôzne predpoklady o časticach a dospieť k rôznym rozdeleniam, opäť ale prostredníctvom maximalizácie entropie. Maximalizácia entropie tu má teda zrejmy poznávací význam.

K rozdeľovacím modelom je však možné dospieť aj iným spôsobom, a to nielen maximalizáciou Boltzmannovej štatisticko-mechanickej entropie, ale aj maximalizáciou Shannonovej informačnej entropie. Na tento spôsob poukázal a zdôvodnil ho americký fyzik E. T. Jaynes [4; 5]. Mohlo by sa zdať, že vlastne žiadne zdôvodnenie ani nie je potrebné, pretože Boltzmannovu entropiu možno, za určitých predpokladov, ako sme už uviedli, prepísať do podoby Shannonovej entropie. Problém je však hlbší a spočíva v prijatí nového prístupu. Shannonova entropia narába výlučne s pravdepodobnosťami; je to entropia pravdepodobnostného rozdelenia. Táto skutočnosť však ešte nie je dostačujúca na prijatie nového prístupu, pretože samotná štatistická mechanika chápe svoj stavový priestor ako pravdepodobnostný, výpovede pravdepodobnostného charakteru sú pre ňu, vzhľadom na jej povahu, imanentné. Ak ale chceme na odvodenie rozdeľovacích modelov použiť Shannonovu informačnú entropiu a rozdelenie vyjadriť v podobe rozdelenia pravdepodobností, potom musíme požadovať, aby tieto rozdelenia boli vedecky maximálne korektné, alebo, vyjadrené rečou matematickej štatistiky, aby tieto rozdelenia boli maximálne nevychýlené, resp. minimálne vychýlené

(*least biased*), maximálne nestranné. A to už je nový prístup. Táto požiadavka je nevyhnutná, je to *conditio sine qua non*; ona musí byť splnená aj za podmienky, že o sledovanom systéme disponujeme istou ohraničenou informáciou, majúcou charakter agregovanej informácie. Jaynes práve ukázal, že Shannonova informačná entropia má tú mimoriadne cennú vlastnosť, že vyhovuje všetkým týmto požiadavkám. Jej maximalizácia vedie k minimálne vychýlenému odhadu pravdepodobností, ak disponibilnú informáciu vyjadríme v podobe ohraničení naložených na maximalizačný postup. Ak teraz prepíšeme situáciu, ktorá viedla k odvodeniu Maxwellovho-Boltzmanovho rozdelenia do podoby, ktorú vyžaduje maximalizácia Shannonovej entropie, potom je treba maximalizovať výraz $H = -\sum_i p_i \ln p_i$ za nasledovných ohraničení:

$\sum_i p_i \in_i = \langle E \rangle$ a $\sum_i p_i = 1$. Veličina $\langle E \rangle$ je stredná hodnota energie systému, ktorá

funguje práve ako disponibilná agregovaná informácia, pretože druhé ohraničenie je vlastne iba normou. Výsledný rozdeľovací model je formálne identický s tým, ktorý rezultoval z maximalizácie Boltzmanovej entropie pri zohľadnení príslušných ohraničení, pričom má tvar $p_i = (1/Z)e^{-\beta \epsilon_i}$, kde $Z = \sum_i e^{-\beta \epsilon_i}$ je opäť

partičná funkcia, pričom p_i treba chápať ako pravdepodobnosť, že náhodne vybratá častica bude v stave i .

Celý tento postup, pri ktorom sa vyberá také rozdelenie pravdepodobností, ktoré rezultuje z maximalizácie Shannonovej entropie, pričom toto rozdelenie je kompatibilné s disponibilnou informáciou vyjadrenou v podobe ohraničení naložených na maximalizačný postup, nazýva Jaynes *maximum entropy principle* (resp. *maximum entropy estimate*); často sa tento postup nazýva aj *entropy maximizing principle*, ktorý, zdá sa, je vhodný aj na slovenský preklad, a to v podobe *princíp maximalizácie entropie*.

Hlbšie pochopenie Jaynesovho princípu umožňuje jeho porovnanie s Laplaceovým princípom, resp. pravidlom nedostatočného dôvodu (hoci Jaynes [5] poznamenáva, že tento princíp či pravidlo už skôr sformuloval švajčiarsky matematik J. Bernoulli).

Laplaceov princíp hlása, že pri nedostatku akejkoľvek informácie nie je žiaden dôvod uprednostniť iné než rovnomerné rozdelenie pravdepodobností. To je jediný korektný postup. Takýto postup sa skutočne aj uplatňuje, napríklad pri hode mincou alebo kockou. Ak nemáme žiadnu informáciu, automaticky predpokladáme, že obe strany mince, resp. všetky strany kocky majú rovnakú pravdepodobnosť pádu. Laplaceov princíp však nič nehovorí o tom, ako postupovať, keď už disponujeme nejakou informáciou. V takejto situácii riešenie poskytuje práve Jaynesov princíp.

Treba si uvedomiť, že rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti, ktoré v súlade s Laplaceovým princípom uplatňujeme pri neprítomnosti akejkol'vek informácie, je rozdelenie, ktoré je maximálne neurčité. Ak teda chceme, aby rozdelenie, pri ktorom už treba zohľadniť disponibilnú informáciu, bolo tiež maximálne neurčité, musíme maximalizovať mieru neurčitosti, ktorou je práve Shannonova entropia. Nové rozdelenie pravdepodobností už síce nebude rovnomerné, ale bude stále najrovnomernejšie, pričom bude zohľadňovať už disponibilnú informáciu a nevytlúči žiadny prípad. Jaynesov princíp tak možno chápať ako zovšeobecnenie Laplaceovho princípu, zahrňujúc aj prípady, keď už disponujeme nejakou informáciou, alebo Laplaceov princíp môžeme chápať ako špeciálny prípad Jaynesovho princípu, keď informácia v pravom zmysle slova chýba a keď ohraničenie sa redukuje na formálno-matematickú normu, že $\sum_i p_i = 1$.

Poznamenajme, že Jaynesov *maximum entropy principle* už vymaňuje entropiu a jej maximalizáciu úplne z fyzikálneho rámca. Tento princíp sa stáva úplne všeobecným, ktorý možno použiť v ktorejkoľvek oblasti, kde problémy rozdelenia sa stávajú relevantné. Hoci Jaynes ho použil v oblasti štatistickej mechaniky, jeho použitie umožňuje odhliadať od vecnej povahy študovaných systémov. Dôležité je poznať disponibilnú informáciu, všetko ostatné je záležitosťou štatistického usudzovania (uzatvárania), štatistickej inferencie, uplatnenia príslušného formalizmu. Jaynes preto svoj princíp chápe ako čisto inferenčný princíp, ktorý nie je viazaný na ten-ktorý fragment reality.

Aplikácia v regionálnej analýze

Jaynesov princíp, ktorý fyzici nazvali *Jaynesov formalizmus*, našiel skutočne mimoriadne rozsiahlu aplikabilitu mimo rámca fyziky; zdá sa, dokonca, že rozsiahlejšiu než v samotnej fyzike. Dnes by už bolo možné vymenovať celý rad oblastí, kde tento princíp našiel výraznú aplikáciu. Medzi ne patrí aj *regionálna analýza*. V tejto oblasti sa problémy priestorového (teritoriálneho) usporiadania ľudskej spoločnosti, najmä však hospodárstva, študujú, ako sme už konštatovali v úvode tohto príspevku, podľa regiónov. Ide teda zjavne o problémy rozdelenia v podobe teritoriálneho rozloženia. Pre regionálnu analýzu je preto celkom prirodzené, že entropiu maximalizujúce rozdeľovacie modely sa tu núkajú ako vhodný bádateľský nástroj.

Jeden z príkladov, na ktorom možno názorne sledovať aplikáciu entropiu maximalizujúcich modelov v regionálnej analýze, je problém *priestorového premiestňovania medzi regiónmi*. Ide napríklad o premiestňovanie obyvateľstva, surovín, tovarov a pod.

Úlohou premiestňovacích modelov, ktoré dostali názov *modely priestorovej interakcie*, resp. stručnejšie, *interakčné modely*, je poskytnúť odhad o veľkosti tohto premiestňovania, ak pritom disponujeme určitou ohraničenou agregovanou informáciou. Na tomto mieste je ale potrebné uviesť, že v regionálnej analýze je pri konštrukcii entropiu maximalizujúcich interakčných modelov možnosť použiť dva formalizmy, a to buď *formalizmus založený na Boltzmanovej entropii*, alebo *Jaynesov formalizmus založený na Shannonovej entropii*. Oba formalizmy vedú k rovnakým konečným modelom. Kým však prvý formalizmus môže byť zaťažovaný fyzikálnou analógiou, pri druhom, ako sme sa to snažili ukázať, to tak nie je. Druhý formalizmus je filozoficky „čistejší“. Napriek tejto skutočnosti má prvý formalizmus istú zrejmú výhodu – je názornejší. Z toho dôvodu sme sa rozhodli uprednostniť práve prvý formalizmus.

Sledujme premiestňovanie osôb (napr. v podobe migrácie, dochádzky za prácou, za službami a pod.) medzi súborom regiónov. Východiskové regióny označme indexom i ($i = 1, 2, \dots, m$), cieľové indexom j ($j = 1, 2, \dots, n$). Počet osôb premiestňujúcich sa z i do j označme T_{ij} . Úlohou je skonštruovať entropiu maximalizujúci model, ktorý by poskytol odhad o veľkosti hodnôt T_{ij} , pričom disponujeme iba agregovanou informáciou, ktorú je ale potrebné vyjadriť v podobe ohraničení. Za „rozumné“ ohraničenia možno považovať nasledovné:

$$\sum_j T_{ij} = O_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

$$\sum_i \sum_j T_{ij} c_{ij} = C \quad (3)$$

Prvé ohraničenie hovorí, že je fixovaný počet osôb vychádzajúcich z regiónu i a smerujúcich do všetkých cieľových regiónov j ($j = 1, 2, \dots, n$), druhé ohraničenie, že je fixovaný počet osôb prichádzajúcich do regiónu j zo všetkých východiskových regiónov i ($i = 1, 2, \dots, m$). Pochopiteľne, je potrebné vziať do úvahy všetky východiskové a cieľové regióny. Tretie ohraničenie hovorí, že sú fixované celkové premiestňovacie náklady (resp. celková precestovaná vzdialenosť), C , pričom premiestňovacie náklady (premiestňovacia vzdialenosť) jednej osoby z i do j sú (je) c_{ij} .

Na základe tejto agregovanej informácie chceme dospieť k detailnejšej informácii, t. j. k odhadu hodnôt T_{ij} , ktoré sú vopred neznáme. Pri odvodení modelu uprednostníme, ako sme to už uviedli, namiesto Shannonovej Boltzmanovu entropiu, v rámci ktorej hodnotu W , ktorá je rozhodujúca, zapíšeme pre potreby regionálnej analýzy nasledovne [8; 9]:

$$W = \frac{T!}{\prod_i \prod_j T_{ij}!} \quad (4)$$

kde $\sum_i O_i = \sum_j D_j = \sum_i \sum_j T_{ij} = T$ je celkový počet osôb premiestňujúcich sa v celom súbore regiónov.

Maximalizácia W , resp. $S = \ln W$ (od Boltzmanovej konštanty môžeme teraz odhliadať) metódou viazaných extrémov (s neurčitými Lagrangeovými multiplifikátormi) pri zohľadnení ohraničení (1) – (3) dospejeme napokon k nasledovnému rozdeľovaciemu modelu:¹

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j e^{-\beta c_{ij}} \quad (5)$$

kde A_i , B_j a β sú parametre modelu, ktoré možno stanoviť (odhadnúť) na základe ohraničení (1) – (3), pričom A_i a B_j je možné vyjadriť nasledovne:

$$A_i = \left[\sum_j B_j D_j e^{-\beta c_{ij}} \right]^{-1} \quad (6)$$

$$B_j = \left[\sum_i A_i O_i e^{-\beta c_{ij}} \right]^{-1} \quad (7)$$

Pri kalibrácii modelu (5) – (7) ide tak o odhad parametrov A_i , B_j a β , ako aj o stanovenie stupňa zhody s napozorovanými dátami. Vzhľadom na technickú povahu nášho problému a koncepčnú povahu tohto príspevku, ponechávame tento problém stranou. Poznamenávame iba, že pri odhade uvedených parametrov kľúčovú úlohu zohráva parameter β , ktorý je považovaný za mieru odporu vyvolanom separáciou i a j . Pri jeho odhade sa spravidla uplatňuje metóda maximálnej vierohodnosti.

Model (5) – (7) je iba východiskový. Modifikáciou ohraničení (napr. vypustením niektorých z nich, resp. inými modifikáciami) môžeme dospieť k celej triede takýchto interakčných modelov.

¹ Jeden z lektorov príspevku upozornil, že ak T_{ij} predstavujú počty osôb, a teda nadobúdajú celočíselné nezáporné hodnoty, optimalizačná úloha je úlohou celočíselného nelineárneho programovania a nemožno ju riešiť na základe Kuhnových-Tuckerových podmienok (pomocou Lagrangeových multiplikátorov). Autor príspevku vyjadruje vďaka za toto upozornenie, ale poznamenáva, že vo všetkých štúdiách, s ktorými prišiel do styku, sa vždy, t. j. aj pri modelovaní premiestňovania osôb, používajú pri maximalizácii pomocou viazaných extrémov Lagrangeove multiplikátory. Navyše, aj v štúdiách zo štatistickej mechaniky, kde sa pomocou entropiu maximalizujúcich modelov odhaduje počet častíc, t. j. diskretných entít, v stave i , sa pri maximalizácii pomocou viazaných extrémov používajú Lagrangeove multiplikátory. Z toho dôvodu zachováva autor postup, ktorý je uplatnený v tejto rozsiahlej literatúre.

Prostredníctvom entropiu maximalizujúcich modelov je však možné analyzovať nielen problémy priestorového premiestňovania, ale aj celý rad iných, pre regionálnu analýzu relevantných problémov. Ich aplikácia na rôzne dáta a v rôznych krajinách ukázala na relatívne dobrú zhodu predikcií týchto modelov s napozorovanými dátami. Boli aplikované či, presnejšie, testované, resp. kalibrované aj na dátach o migrácii medzi krajmi bývalého Československa, resp. medzi regiónmi súčasného Slovenska. Čitateľa, ktorý má záujem oboznámiť sa s výsledkami tejto kalibrácie, odkazujeme na príslušnú literatúru [7; 1].

Záver

Entropiu maximalizujúce modely sú produktom netradičného použitia takéhoto fundamentálneho pojmu vedy, akým je *entropia*. Rozhodujúcu úlohu pri výraznom vykročení entropie mimo rámca fyziky bola Jaynesova formulácia princípu maximalizácie entropie, založeného na použití Shannonovej informačnej entropie. V oblasti regionálnej analýzy je však možné dobre narábať aj s Boltzmannovou štatisticko-mechanickou entropiou, ako to ukázal priekopník tohto typu modelovania britský regionálny analytik A. G. Wilson (1967, 1970). V istom období sa tieto modely v regionálnej analýze tak intenzívne študovali, rozvíjali a aplikovali, že možno hovoriť v spojitosti s nimi o *modelovej paradigme*. Dnes už tieto modely patria k štandardným bádateľským nástrojom regionálnej analýzy.

Literatúra

- [1] BEZÁK, A.: Interregional Migration in Slovakia: Some Tests of Spatial Interaction Models. *Geografický časopis*, 52, 2000, č. 1, s. 15 – 32.
- [2] BOWLER, M. G.: *Lectures on Statistical Mechanics*. Oxford: Pergamon Press 1982.
- [3] GEORGESCU-ROEGEN, N.: *The Entropy Law and the Economic Process*. Cambridge (Mass.): Harvard University Press 1971.
- [4] JAYNES, E. T.: Information Theory and Statistical Mechanics. *Physical Review*, 106, 1957, č. 4, s. 620 – 630.
- [5] JAYNES, E. T.: Where Do We Stand on Maximum Entropy? In: LEVINE, R. P. – TRIBUS, M. (eds.): *The Maximum Entropy Formalism*. Cambridge (Mass.): MIT Press 1979, s. 15 – 118.
- [6] LEVIČ, V. G.: *Úvod do statistické fyziky*. Praha: NČSAV 1954.
- [7] PAULOV, J.: Entropia v urbánnej a regionálnej analýze: konceptuálny rámec a základy aplikácie. *Geographica Slovaca*, 2, 1993.
- [8] WILSON, A. G.: A Statistical Theory of Spatial Distribution Models. *Transportation Research*, 1, 1967, s. 153 – 169.
- [9] WILSON, A. G.: *Entropy in Urban and Regional Modelling*. London: Pion 1970.