

JOZEF KRCHO*

**MATEMATICKÉ VLASTNOSTI GEORELIÉFU Z HĽADISKA
GEOMETRICKÝCH FORIEM A JEHO MODELOVANIE APROXIMUJÚCIMI
FUNKCIAMI DVOCH PREMENNÝCH**

Jozef Krcho: Mathematical Properties of the Georelief from the Viewpoint of Geometric Forms and Its Modelling by Approximating Functions of Two Variables. Geogr. Čas., 41, 1989, 1; 6 figs, 18 refs.

A definition of the georelief and the expression of topographical surface together with the parameter of time and without it. Structural properties of the topographical surface and its scalar field. A set of morphometric parameters of the georelief and structural fields of the scalar field of altitudes. Geometrical forms of the georelief, their hierarchic levels and influence on the spatial differentiation of processes. Structural properties of approximating functions and their relation to structural properties of the topographical surface.

GEORELIÉF AKO SUBSYSTÉM FYZICKOGEOGRAFICKEJ SFÉRY

Vplyv georeliéfu na priestorovú diferenciaciu procesov v geografickej sfére je tak výrazný, že georeliéf sa stal dôležitým predmetom záujmu v mnohých sférach ľudskej činnosti. Je predmetom záujmu nielen mnohých geovedných disciplín, ale aj technických disciplín, urbanizmu, územného plánovania, projekcie a stavebnej praxe. Je však v celosvetovom meradle dôležitým predmetom záujmu aj vojenskej sféry vo všetkých jej oblastiach, námornej, vzdušnej i pozemnej.

Georeliéf je na jednej strane výslednicou procesov prebiehajúcich v geografickej sfére, na druhej strane však sám na tieto procesy vplýva a priestorovo ich diferencuje. Na priestorovú diferenciaciu procesov vplýva prostredníctvom množiny morfometrických parametrov G_{RF} . Každá vedná disciplína si georeliéf všíma zo svojho hľadiska, ktoré je dané objektom a predmetom jej štúdia, ako aj cieľom výslednej realizácie.

Nás zaujíma georeliéf ako pevné, ale dynamické rozhranie medzi atmosférou, resp. hydrosférou na jednej strane a pedosférou s biosférou, či litosférou na druhej strane, o ktorom vždy uvažujeme na určitej rozlišovacej úrovni. Z teoreticko-metodického hľadiska nás teda zaujíma ako dynamická plocha a jej kvantitatívne ukazovatele (morfometrické parametre), ktoré vyjadrujú jej vlastnosti a geometrické formy vo vzťahu k ostatným zložkám krajiny ako látkovo-

* Doc. RNDr. Jozef Krcho, CSc., Prírodovedecká fakulta UK, Katedra fyzickej geografie a kartografie, Mlynská dolina, 842 15 Bratislava.

-energetického a informačného systému s vlastným špecifickým obehom látok, energie a informácie a s vlastnou priestorovou organizáciou. Georeliéf je teda integrálnou súčasťou krajiny, ale zároveň má v nej zvláštne postavenie.

Krajinu pritom v zmysle prác [8, 9, 10] chápeme ako priestorovo organizovaný látkovo-energetický a informačný systém $S_G(P, T)$, ktorého reálny geometrický priestor je vymedzený vzhľadom na referenčnú plochu Zeme a je študovaný v súradnicovej sústave $\langle O, \varphi, \lambda \rangle$, pričom O — počiatok súradnicovej sústavy je totožný so stredom referenčnej plochy Zeme, φ — zemepisná šírka, λ — zemepisná dĺžka. V systéme $S_G(P, T)$ možno v zmysle prác [8, 9, 10] na najnižšej rozlišovacej úrovni vyjadriť dva autonómne, priestorovo organizované subsystémy $S_{AG}(P, T)$, $S_{FG}(P, T)$, ktoré sú v interakcii; $S_{AG}(P, T)$ — socioekonomickogeografická sféra, $S_{FG}(P, T)$ — fyzickogeografická sféra. Symbol $P = \varphi, \lambda, \pm h$ vyjadruje v $S_G(P, T)$, $S_{AG}(P, T)$, $S_{FG}(P, T)$ polohový aspekt, kde veličina $\pm h$ je výška v smere normály k referenčnej ploche meraná od referenčnej plochy na jej vonkajšiu stranu ($+h$) a na vnútornú stranu ($-h$), a T vyjadruje parameter času. Nás pritom vzhľadom na georeliéf zaujíma subsystém $S_{FG}(P, T) = \{G_{FG}(P, T), R_{FG}(\Delta P, T)\}$ ako samostatný systém, v ktorom $G_{FG}(P, T) = \{\alpha_k\}_{k=1}^5$ je množina prvkov, z ktorých tento systém pozostáva a $R_{FG}(\Delta P, T)$ je matica štruktúry systému $S_{FG}(P, T)$ [8, 9, 10, 11, 13]. Pri zvýšení rozlišovacej úrovne sú prvky $\alpha_k(P, T)$ rozlíšené ako usporiadané množiny $\alpha_k(P, T) \equiv Ga_k(P, T) = \{a_{kj}(P, T)\}_{j=1}^{n_k}$, ktorých prvky $a_{kj}(P, T)$ reprezentujú pre jednotlivé $k = 1, 2, 3, 4, 5, j = 1, 2, \dots, n_k$ ($n_1 \neq n_2 \neq \dots \neq n_5$) jednotlivé zložky geosfér $\alpha_1(P, T)$ — atmosféra, $\alpha_2(P, T)$ — hydrosféra, $\alpha_3(P, T)$ — litosféra, $\alpha_4(P, T)$ — pedosféra, $\alpha_5(P, T)$ — biosféra, takže

$$G_{FG}(P, T) = [\alpha_k(P, T)]_{k=1}^5 = [Ga_k(P, T)]_{k=1}^5 = \{[a_{kj}(P, T)]_{j=1}^{n_k}\}_{k=1}^5.$$

Pretože prvky $a_{kj}(P, T) \in Ga_k(P, T)$ nie sú navzájom nezávislé, ale existuje medzi nimi pre $k = 1, 2, 3, 4, 5$ množina vzťahov $Ra_k(\Delta P, T)$, môžeme jednotlivé geosféry krajiny v zmysle prác [8, 9, 13] študovať ako priestorovo organizované subsystémy $Sa_k(P, T) = \{Ga_k(P, T), Ra_k(P, T)\}$ systému $S_{FG}(P, T)$. V zmysle tých istých prác [8, 9, 10, 13] možno v každej polohe P geometrického priestoru systému $S_{FG}(P, T)$ a v každom čase T určiť celkový stav $Z_{FG}(P, T)$ systému $S_{FG}(P, T)$, celkové stavy $Za_k(P, T)$ jeho jednotlivých subsystémov $Sa_k(P, T)$, ako aj celkové stavy $Z_{kj}(P, T)$ jednotlivých prvkov $a_{kj}(P, T)$, takže

$$Z_{FG}(P, T) = [Za_k(P, T)]_{k=1}^5 = \{[Z_{kj}(P, T)]_{j=1}^{n_k}\}_{k=1}^5.$$

Pritom celkový stav $Z_{kj}(P, T)$ každého prvku $a_{kj}(P, T) \in Ga_k(P, T) \subset G_{FG}(P, T)$ je v zmysle prác [8, 9, 10, 13] určený množinou stavových veličín z_1, z_2, \dots, z_n patriacich do parametrickej bázy $P_{FG} = \bigcup_{k=1}^5 Pa_k$ systému $S_{FG}(P, T)$, pričom Pa_k sú parametrické subbázy jednotlivých subsystémov $Sa_k(P, T)$.

Takáto koncepcia je z hľadiska matematického opisu georeliéfu ako zvláštneho subsystému $S_{RF}(P, T)$ krajiny veľmi dôležitá, a to z hľadiska príslušnosti

stavových veličín $z_i \in P_{FG} = \bigcup_{k=1}^5 Pa_k$ určujúcich celkové stavy jednotlivých prvkov

a_{kj} (P, T) a subsystémov Sa_k (P, T), ktoré sú v interakcii. Výsledkom interakcie je priestorový priebeh povrchových častí subsystémov litosféry Sa_3 (P, T), resp. pedosféry Sa_4 (P, T), ktorými je tvorený georeliéf.

GEORELIÉF A VYJADRENIE JEHO TOPOGRAFICKEJ PLOCHY S PARAMETROM A BEZ PARAMETRA ČASU T

Úplnú definíciu georeliéfu ako zvláštneho subsystému $S_{RF}(P, T) = ((G_{RF}(P, T), R_{RF}(\Delta P, T)))$ sme uviedli v prácach [11, 13]. Z hľadiska matematického opisu georeliéfu uveďme jej hlavnú časť: Georeliéf je na určitej rozlišovacej úrovni vedené pevné, ale pritom dynamické rozhranie medzi litosférou Sa_3 (P, T), resp. pedosférou Sa_4 (P, T) s biosférou Sa_5 (P, T) na jednej strane a atmosférou Sa_1 (P, T), resp. hydrosférou Sa_2 (P, T) na druhej strane, ktoré má z hľadiska jeho priestorového priebehu študovaného v súradnicovej sústave $\langle O, \varphi, \lambda \rangle$ vlastnosti plochy a ktoré teda považujeme za plochu tvorenú množinou bodov RF na množine normál N_i v intervale $\langle H_D, H_H \rangle$ k referenčnej ploche Zeme tvorenej množinou F.

K úplnej definícii georeliéfu patria v prácach [11, 13] aj doplnujúce poznámky, v ktorých je špecifikovaný suchozemský reliéf a reliéf morského dna.

Už zo skrátenej definície georeliéfu je zrejmé, že hodnota výšky h_{ir} v každom bode georeliéfu $A_{ir}^*(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir}) \in RF$ je pre každý časový moment T predošlej postupnej zmeny celkových stavov Za_k (P, T) subsystémov Sa_k (P, T), $k = 1, 2, 3, 4, 5$, a teda aj celkových stavov Z_{kj} (P, T) ich prvkov a_{kj} (P, T) určených stavovými veličinami z_n . Priestorové rozloženie výšok h_{ir} bodov $A_{ir}^*(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir}) \in RF$ tvoriacich georeliéf je teda vo funkčnom vzťahu k stavovým veličinám z_n , pričom hodnoty jednotlivých stavových veličín súvisia jednak navzájom so sebou a jednak sú funkciou polohy φ, λ a jednak funkciou času T . Hodnotu výšky h ako funkciu stavových veličín z_1, z_2, \dots, z_n , polohy φ, λ a času T môžeme potom vyjadriť vo všeobecnom tvare

$$h = f_{RF}(z_1, z_2, \dots, z_n), \text{ kde } z_i = g_i(\varphi, \lambda, T)_{i=1,2,\dots,n} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \psi_1(z_2, z_3, \dots, z_n) \\ z_2 &= \psi_2(z_1, z_3, \dots, z_n) \\ &\dots \\ z_n &= \psi_n(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}). \end{aligned} \quad (2)$$

Funkcie (1), (2) vyjadrujú priestorové rozloženie výšok a jeho vývoj v čase T vzhľadom na modelačné procesy.

Z funkcií (1), (2) možno vyjadriť všeobecné funkčné vzťahy pre množinu morfometrických parametrov $G_{RF}(P, T)$ ako závisle premenných na stavových veličinách z_i , na polohe φ, λ a na čase T , kde

$$G_{RF}(P, T) = \{\Delta h(\Delta P, T), \gamma_N(P, T), A_N(P, T), \omega(P, T), K_r(P, T), \dots\}, \quad (3)$$

kde jednotlivé morfometrické parametre majú v zmysle prác [11, 12, 13] nasledovný význam:

$\Delta h (\Delta P, T)$ — relatívna výška v smere spádových kriviek, $\gamma_N (P, T)$ — sklon georeliéfu v smere spádových kriviek, $A_N (P, T)$ — orientácia georeliéfu vzhľadom ku svetovým stranám, $\omega (P, T)$ — normálová krivosť georeliéfu (krivosť v smere spádových kriviek), $K_r (P, T)$ — horizontálna krivosť georeliéfu (krivosť v smere vrstevníc). Východiskom pre odvodenie morfometrických parametrov $\gamma_N (P, T)$, $A_N (P, T)$ je diferenciál dh funkcie (1), ktorý je určený vzťahom

$$dh = F_\varphi d\varphi + F_\lambda d\lambda + F_T dT \quad (4)$$

kde

$$\begin{aligned} F_\varphi = & \frac{\partial f_R}{\partial z_1} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z_2} \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z_3} \frac{\partial g_3}{\partial \varphi} + \dots + \frac{\partial \psi_1}{\partial z_n} \frac{\partial g_n}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \frac{\partial f_R}{\partial z_2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z_1} \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z_3} \frac{\partial g_3}{\partial \varphi} + \dots + \frac{\partial \psi_2}{\partial z_n} \frac{\partial g_n}{\partial \varphi} \right) + \dots \quad (5) \\ & \dots + \frac{\partial f_R}{\partial z_n} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial z_1} \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi_n}{\partial z_2} \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} + \dots + \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z_{n-1}} \frac{\partial g_{n-1}}{\partial \varphi} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_\lambda = & \frac{\partial f_R}{\partial z_1} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z_2} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z_3} \frac{\partial g_3}{\partial \lambda} + \dots + \frac{\partial \psi_1}{\partial z_n} \frac{\partial g_n}{\partial \lambda} \right) + \\ & + \frac{\partial f_R}{\partial z_2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z_1} \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z_3} \frac{\partial g_3}{\partial \lambda} + \dots + \frac{\partial \psi_2}{\partial z_n} \frac{\partial g_n}{\partial \lambda} \right) + \dots \quad (5') \\ & \dots + \frac{\partial f_R}{\partial z_n} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial z_1} \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial \psi_n}{\partial z_2} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} + \dots + \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z_{n-1}} \frac{\partial g_{n-1}}{\partial \lambda} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_T = & \frac{\partial f_R}{\partial z_1} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z_2} \frac{\partial g_2}{\partial T} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z_3} \frac{\partial g_3}{\partial T} + \dots + \frac{\partial \psi_1}{\partial z_n} \frac{\partial g_n}{\partial T} \right) + \\ & + \frac{\partial f_R}{\partial z_2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z_1} \frac{\partial g_1}{\partial T} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z_3} \frac{\partial g_3}{\partial T} + \dots + \frac{\partial \psi_2}{\partial z_n} \frac{\partial g_n}{\partial T} \right) + \dots \quad (5'') \\ & \dots + \frac{\partial f_R}{\partial z_n} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial z_1} \frac{\partial g_1}{\partial T} + \frac{\partial \psi_n}{\partial z_2} \frac{\partial g_2}{\partial T} + \dots + \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z_{n-1}} \frac{\partial g_{n-1}}{\partial T} \right). \end{aligned}$$

Základným východiskom pre určenie morfometrických parametrov $\omega (P, T)$, $K_r (P, T)$ je diferenciál d^2h funkcie (1) určený vzťahom

$$d^2h = F_\varphi^{(2)} d\varphi + 2F_{\varphi\lambda}^{(2)} d\varphi d\lambda + 2F_{\varphi T}^{(2)} d\varphi dT + 2F_{\lambda T}^{(2)} d\lambda dT + F_\lambda^{(2)} d\lambda^2 + F_T^{(2)} dT^2, \quad (6)$$

v ktorom $F_T^{(2)}$, $F_\lambda^{(2)}$, $F_{\lambda T}^{(2)}$, $F_{\varphi T}^{(2)}$, $F_{\varphi\lambda}^{(2)}$, $F_\varphi^{(2)}$ sú druhé parciálne derivácie z prvých parciálnych derivácií (5), (5'), (5'').

Veľkosti morfometrických parametrov z množiny (3) nie sú v zmysle prác [9, 10, 11, 13] navzájom nezávislé, ale sú pospájané vzájomnými funkčnými vzťahmi, ktoré tvoria množinu závislosti $R_{RF}(\Delta P, T)$. Pretože morfometrické

parametre v (3) sú odvodené z funkcií (1), (2) vyjadrujúcich georeliéf ako dynamickú plochu, môžeme ho chápať ako zvláštny dynamický priestorovo diferencovaný nehmotný subsystém

$$S_{RF}(P, T) = (G_{RF}(P, T), R_{RF}(\Delta P, T)) \quad (7)$$

podrobnejšie uvedený v prácach [9, 10, 11¹, 13], ktorý je na jednej strane výslednicou procesov z interakcie subsystémov $Sa_k(P, T)$, na druhej strane sám spätiväzobne na tieto subsystémy $Sa_k(P, T)$, vplýva. Jeho výška h , a teda aj jeho jednotlivé prvky v usporiadanej množine $G_{RF}(P, T)$ (3) sa v zmysle definície georeliéfu v každom bode $A_{ir}(\varphi_i, \lambda_i, h_{ir}) \in RF$ menia v priebehu času v závislosti od stavových veličín a dynamiky celkových stavov subsystémov $Sa_k(P, T)$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ systému $S_{FG}(P, T)$. Dynamika zmien hodnôt h a jednotlivých morfometrických parametrov v (3) je však vo väčších priestorových reláciách o mnoho pomalšia ako dynamika subsystémov $Sa_1(P, T)$, $Sa_2(P, T)$, čo závisí od vlastností subsystému $Sa_3(P, T)$. Preto pre kratšie časové intervaly $\Delta T_{PK} = 10, 30, 50, 100$ rokov môžeme v rovniciach (1), (2) parameter času T považovať počnúc od nejakého časového momentu T_p až po časový moment T_K , t. j. v intervale $\langle T_p, T_K \rangle$ za konštantu $T = \text{konšt.}$ [11, 13]. Dĺžka intervalu $\Delta T_{PK} = 10, 30, 50, 100 \dots$ rokov závisí od mierky mapy a jej rozlišovacej úrovne [11, 13].

Vo vzťahoch (4), (6) pre $T = \text{konšt.}$ z intervalu $\langle T_p, T_K \rangle$ platí, že $F_T = 0$, $F_{\varphi T}^{(2)} = 0$, $F_{\lambda T}^{(2)} = 0$, $F_T^{(2)} = 0$, takže tieto vzťahy nadobudnú tvar

$$dh = F_{\varphi} d\varphi + F_{\lambda} d\lambda \quad (8)$$

$$d^2h = F_{\varphi}^{(2)} d\varphi^2 + 2F_{\varphi\lambda}^{(2)} d\varphi d\lambda + F_{\lambda}^{(2)} d\lambda^2. \quad (8')$$

Priestorové rozloženie výšok h je v takomto prípade závislé už iba od polohy φ , λ , t. j. výšky h sú iba funkciou polohy φ , λ , takže georeliéf je počas uvedeného intervalu $\langle T_p, T_K \rangle$ považovaný za statickú plochu. Túto plochu vyjadríme funkciou vo všeobecnom tvare

$$h = f_{RF}(\varphi, \lambda), \quad (9)$$

v ktorej

$$dh = \frac{\partial f_{RF}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f_{RF}}{\partial \lambda} d\lambda \quad (10)$$

$$d^2h = \frac{\partial^2 f_{RF}}{\partial \varphi^2} d\varphi^2 + 2 \frac{\partial^2 f_{RF}}{\partial \varphi \partial \lambda} d\varphi d\lambda + \frac{\partial^2 f_{RF}}{\partial \lambda^2} d\lambda^2 \quad (11)$$

pričom vzhľadom na (4) a (6) pre uvedený časový interval $\langle T_p, T_K \rangle$ platí, že

$$\frac{\partial f_{RF}}{\partial \varphi} = F_{\varphi}; \quad \frac{\partial f_{RF}}{\partial \lambda} = F_{\lambda}; \quad \frac{\partial^2 f_{RF}}{\partial \varphi^2} = F_{\varphi}^{(2)}; \quad \frac{\partial^2 f_{RF}}{\partial \varphi \partial \lambda} = F_{\varphi\lambda}^{(2)}; \quad \frac{\partial^2 f_{RF}}{\partial \lambda^2} = F_{\lambda}^{(2)}. \quad (12)$$

Subsystém $S_{RF}(P, T)$ (7) sa tak stáva staticky priestorovo organizovaným systémom

$$S_{RF}(P) = (G_{RF}(P), R_{RF}(AP)), \quad (13)$$

v ktorom sú hodnoty jeho jednotlivých prvkov z množiny $G_{RF}(P)$ iba funkciou polohy φ , λ , ako to napríklad plynie z funkčných vzťahov pre dva základné z nich, t. j. pre $\gamma_N(P)$, $A_N(P)$

$$\text{tg} \gamma_N = |\text{grad } h| = \sqrt{[F_\varphi]^2 + [F_\lambda]^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_{RF}}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_{RF}}{\partial \lambda}\right)^2} \Rightarrow \quad (14)$$

$$\gamma_N = \text{arc tg } |\text{grad } h|$$

$$\text{tg } A_N = \frac{F_\varphi}{F_\lambda} = \frac{\frac{\partial f_{RF}}{\partial \varphi}}{\frac{\partial f_{RF}}{\partial \lambda}} \Rightarrow A_N = \text{arc tg} \left(\frac{F_\varphi}{F_\lambda} \right) = \text{arc tg} \left[\frac{\frac{\partial f_{RF}}{\partial \varphi}}{\frac{\partial f_{RF}}{\partial \lambda}} \right]. \quad (15)$$

Pri interakcii subsystému (13) so subsystémami $Sa_k(P, T)$ študujeme v časovom intervale $T_P \leq T \leq T_K$ iba vplyv georeliéfu na priestorovú diferenciaciu stavov subsystémov $Sa_k(P, T)$ v systéme $S_{FG}(P, T)$, ale už nie vplyv týchto subsystémov na georeliéf ako subsystém $S_{RF}(P)$.

Doterajšie základné úvahy sme formulovali vzhľadom na reálny geometrický priestor geografickej sféry určený v súradnicovej sústave $\langle O, \varphi, \lambda \rangle$. Georeliéf ako aj celý systém $S_{FG}(P, T)$ s jeho subsystémami $Sa_k(P, T)$ však modelujeme v abstraktnom kartografickom zobrazovacom priestore určenom v karteziánskej súradnicovej sústave $\langle O, x, y, z \rangle$, do ktorého sa zobrazí reálny priestor geografickej sféry. Zobrazenie reálneho priestoru geografickej sféry do abstraktného zobrazovacieho priestoru (kartografického priestoru) je dané jednoduchoznačnou operáciou zobrazenia určenou zobrazovacími rovnicami

$$\begin{aligned} x &= f_1(\varphi, \lambda); \quad y = f_2(\varphi, \lambda); \quad z = f_3(h); \\ \varphi &= F_1(x, y); \quad \lambda = F_2(x, y); \quad h = F_3(z). \end{aligned} \quad (16)$$

Výsledne stručne uvedme, že v zobrazovacom priestore v rovnicach (1), (2) namiesto premenných veličín φ , λ , h uvažujeme o premenných veličinách x , y , z . Rovnice $z_i = g_i(\varphi, \lambda, T)$ budú mať pritom tvar $z_i = G_i(x, y, T)$, kde premenné veličiny x , y sú určené prvými dvomi zobrazovacími rovnicami (16). Preto sa v zobrazovacom priestore príslušne zmenia aj vzťahy (4) až (6) a (8), (8'), z ktorých pre stručnosť uvedme iba vzťahy (8), (8'), ktoré budú mať tvar

$$dz = F_x dx + F_y dy, \quad (17)$$

$$d^2z = F_{xx} dx^2 + 2 F_{xy} dx dy + F_{yy} dy^2. \quad (18)$$

V kartografickom zobrazovacom priestore bude teda plocha (9) určená v súradnicovej sústave $\langle O, x, y, z \rangle$ funkciou

$$z = z(x, y). \quad (19)$$

Funkcia [19] je jednoznačným zobrazením funkcie (9). Zobrazenie je jedno-
jednoznačné, čo vyjadríme v tvare

$$h = f_{RF}(\varphi, \lambda) : \overleftrightarrow{z} = z(x, y), \quad (20)$$

kde x, y ako aj φ, λ sú určené zobrazovacími rovnicami [16].

ŠTRUKTÚRNE VLASTNOSTI TOPOGRAFICKEJ PLOCHY A JEJ SKALÁRNEHO POLA

Podrobnejšie boli navodené v prácach [7, 13, 18]. Tu iba uvedme, že štruktúrne vlastnosti funkcie [19] sú vyjadrením jej vnútornej stavby a sú charakterizované jednak zákonitosťou rozdelenia hodnôt skalárov z v skalárnej báze a jednak zákonitosťou priestorového rozloženia parciálnych derivácií prvého a druhého rádu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} \quad (21)$$

do jednotlivých oblastí skalárnej bázy. O funkcii [19] predpokladáme, že je v danej oblasti spojitá, spojitou diferencovateľná až do najmenej druhého rádu a preto taylorovsky rozvinuteľná. To znamená, že parciálne derivácie (21) sú konečné, jednoznačné a spojité [7, 11, 13, 18], pričom môžu nadobúdať hodnoty väčšie ako nula, rovné nule, menšie ako nula. Ku každému bodu A_i' v skalárnej báze (x, y) a jemu odpovedajúcemu bodu A_i'' na topografickej ploche je možno priradiť dve nekonečne malé okolia, ktorých stredom je práve zvolený bod A_i', A_i'' a ktoré sa teda koncentricky prekrývajú. Tieto okolia sú pre ľubovoľný bod A_i', A_i'' určené rovnicami

$$dz = z_x dx + z_y dy \quad (22)$$

$$Dz = dz + (1/2) d^2z = z_x dx + z_y dy + (1/2) (z_{xx} dx^2 + 2z_{xy} dx dy + z_{yy} dy^2). \quad (23)$$

Hodnoty parciálnych derivácií v rovnicach (22), (23) sú pre zvolený bod A_i' , resp. A_i'' konštantami a veličiny dz, Dz, dx, dy sú premennými veličinami. Rovnica (22) je lineárna a je ňou určené tzv. lineárne okolie bodu A_i', A_i'' , v ktorom sú charakterizované tzv. priamkové elementy topografickej plochy. Rovnica (23) je kvadratická a je ňou v tom istom bode $A_i',$ resp. A_i'' určené jeho tzv. kvadratické okolie, v ktorom sú charakterizované krivkové elementy plochy [18]. Lineárna rovnica (22) je v zmysle práce [18] diferenciál k funkcii dotykovej roviny k stredovému bodu A_i'' ; kvadratická rovnica (23) je diferenciál k rovnici oskulačného paraboloidu, ktorý má vrchol v strede okolia A_i'' a ktorého os je totožná s normálou N k topografickej ploche v jej bode A_i'' . Normála N je určená vektorom normály $N = [-z_x, -z_y, +1]$ orientovaným na vonkajšiu stranu topografickej plochy, ktorým je zároveň určená dotyková rovina o rovnici

$$Z - z_i - z_x (X - x_i) - z_y (Y - y_i) = 0, \quad (24)$$

v ktorej x_i, y_i, z_i sú súradnice dotykového bodu A_i'' na topografickej ploche a X, Y, Z sú súradnice ostatných bodov dotykovej roviny.

Aby sme stanovili vlastnosti topografickej plochy georeliéfu v jej ľubovoľnom bode A_i'' a v jeho diferenciálne malom kvadratickom okolí, určíme v tomto bode vzhľadom na jeho okolie priebeh normálových krivostí vo všetkých smeroch určených normálovými rezi, ktoré prechádzajú cez daný bod A_i'' . Označíme krivosť normálového rezu na topografickej ploche (tzv. normálovú krivosť) symbolom $K_N = 1/R_N$, kde $R_N = 1/K_N$ je polomer normálovej krivosti, ktorý leží v normále N k topografickej ploche prechádzajúcej bodom A_i'' . Táto krivosť $K_N = 1/R_N$ je vo zvolenom bode A_i'' topografickej plochy určená v diferenciálnej geometrii vzťahom

$$K_N = \frac{1}{R_N} = \frac{Ldx^2 + 2Mdx dy + Ndy^2}{Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2}, \quad (25)$$

$$\text{kde } E = 1 + z_x^2; \quad F = z_{xy}; \quad G = 1 + z_y^2 \quad (26)$$

sú základné veličiny prvej Gaussovej diferenciálnej formy, ktorej diskriminant $D_1 = EG - F^2$ a

$$L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}; \quad M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}; \quad N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \quad (27)$$

sú základné veličiny druhej Gaussovej diferenciálnej formy, ktorej diskriminant $D_2 = LN - M^2$. Vzťah (25) po úprave vyjadríme v tvare

$$K_{N,m} = \frac{1}{R_{N,m}} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \cdot \frac{z_{xx} + 2z_{xy}m + z_{yy}m^2}{1 + z_x^2 + 2z_x z_y m + (1 + z_y^2)m^2}, \quad (28)$$

v ktorom $m = dy/dx = \operatorname{tg} \alpha$ uvažujeme ako o premennom parametre, ktorý sa pre smerový uhol α z intervalu $(0^\circ, 360^\circ)$ mení v intervale $(-\infty; +\infty)$. Pre každú jednu hodnotu m dostávame na topografickej ploche jeden normálový rez prechádzajúci bodom A_i'' , s príslušnou krivosťou $K_{N,m}$ v bode A_i'' . Normálová krivosť $K_{N,m} = 1/R_{N,m}$ pritom v každom zvolenom bode A_i'' nadobúda pre nejakú hodnotu m_1 parametra m jedno maximum $K_{N1} = 1/R_{N1}$ a pre hodnotu m_2 parametra m jedno minimum $K_{N2} = 1/R_{N2}$. Tieto rezy sa v literatúre diferenciálnej geometrie označujú ako hlavné normálové rezy a ich dotyčnice k topografickej ploche, ktoré ležia v jej dotykovej rovine (24) ako hlavné dotyčnice $t_1 = t_\xi, t_2 = t_\eta$.

Maximá $K_{N1} = 1/R_{N1}$ a minimá $K_{N2} = 1/R_{N2}$ krivostí normálových rezov $K_{N,m}$ môžu vo zvolenom bode A_i'' čo do znamienok navzájom nadobúdať štyri rôzne základné hodnoty:

1. hodnoty, keď

$$\left(\frac{1}{(R_N)_1} > 0 \wedge \frac{1}{(R_N)_2} > 0 \right) \vee \left(\frac{1}{(R_N)_1} < 0 \wedge \frac{1}{(R_N)_2} < 0 \right); \quad \left(\frac{1}{(R_N)_1} \neq \frac{1}{(R_N)_2} \right), \quad (29)$$

pre ktoré diskriminant $D_2 = LN - M^2 > 0$, takže $K_{N,m} = 1/R_{N,m}$ má pre všetky hodnoty m rovnaké znamienko, pričom bod A_i^* topografickej plochy a jej skalárneho poľa sa nazýva eliptickým bodom;

2. hodnoty, keď

$$\left(\frac{1}{\{R_N\}_1} > 0 \wedge \frac{1}{\{R_N\}_2} < 0 \right) \vee \left(\frac{1}{\{R_N\}_1} < 0 \wedge \frac{1}{\{R_N\}_2} > 0 \right); \left(\frac{1}{\{R_N\}_1} \neq \frac{1}{\{R_N\}_2} \right), \quad (30)$$

pre ktoré diskriminant $D_2 = LN - M^2 < 0$, takže $K_{N,m} = 1/R_{N,m}$ nadobúda so zmenou hodnôt parametra m rôzne znamienka, pričom pre určité hodnoty m je $K_{N,m} = 1/R_{N,m} > 0$ a pre určité hodnoty m je $K_{N,m} = 1/R_{N,m} < 0$, takže takýto bod A_i^* topografickej plochy sa nazýva hyperbolickým bodom;

3. hodnoty, keď

$$\left(\frac{1}{\{R_N\}_1} > 0 \wedge \frac{1}{\{R_N\}_2} = 0 \right) \vee \left(\frac{1}{\{R_N\}_1} < 0 \wedge \frac{1}{\{R_N\}_2} = 0 \right), \quad (31)$$

pre ktoré diskriminant $D_2 = LN - M^2 = 0$, takže normálová krivosť $K_{N,m} = 1/R_{N,m}$ nemení so zmenou parametra m znamienko, avšak pre určité hodnoty m je $K_{N,m} = 1/R_{N,m} = 0$, takže takýto bod sa volá parabolickým bodom topografickej plochy; normálová krivosť $K_{N,m} = 1/R_{N,m}$ nadobúda pritom v každom príslušnom bode A_i^* pre hodnotu m_1 jedno maximum $1/R_{N,1}$ a pre hodnotu parametra m_2 jedno minimum $1/R_{N,2}$;

4. hodnoty, keď

$$\left(\frac{1}{\{R_N\}_1} = \frac{1}{\{R_N\}_2} > 0 \right) \vee \left(\frac{1}{\{R_N\}_1} = \frac{1}{\{R_N\}_2} < 0 \right), \quad (32)$$

pre ktoré platí $D_2 = LN - M^2 > 0$ ako v (29), ktoré sú však ich špeciálnym prípadom a nazývajú sa kruhovými bodmi.

Nadobúdanie hodnôt $K_{N,m} = 1/R_{N,m}$ podľa (29) až (32) závisí od tvaru topografickej plochy v okolí jej dotykového bodu A_i^* a má pre nás z hľadiska morfometrickej analýzy veľký význam.

Smernice m_1, m_2 hlavných dotyčníc $t_1 = t_\xi, t_2 = t_\eta$ sú určené v diferenciálnej geometrii známymi vzťahmi

$$m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 = \frac{2z_{xy}}{z_{xx} + z_{yy} - \sqrt{(z_{yy} - z_{xx})^2 + z_{xy}^2}}, \quad (33)$$

$$m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_2 = \frac{2z_{xy}}{z_{xx} + z_{yy} + \sqrt{(z_{yy} - z_{xx})^2 + z_{xy}^2}}, \quad (34)$$

pričom pre m_1, m_2 zároveň platí, že $m_1 \cdot m_2 = -1$. To znamená, že hlavné dotyčnice $t_1 = t_\xi, t_2 = t_\eta$ sú navzájom na seba vždy kolmé. Keďže ležia v dotykovej rovine (24), normála N k topografickej ploche tvorí s nimi hlavný trojhran.

Uvažujme preto vo zvolenom bode A_i^* topografickej plochy o súradnicovej sústave $\langle O, \xi, \eta, z_N \rangle$, ktorej os z_N je totožná s normálou N k topografickej ploche v tomto bode A_i^* a osí ξ, η sú v dotykovej rovine (24) položené do hlav-

ných dotyčníc $t_1 = t_\xi$, $t_2 = t_\eta$ so smernicami m_1 , m_2 {33}, {34}, takže hlavný trojhran sa stane súradnicovým trojhranom. V tejto súradnicovej sústave je potom jedna zo smerníc {33}, {34} rovná nule, druhá ∞ , takže v rovniciach {22}, {23} uvažovaných v tejto súradnicovej sústave bude

$$z_x = 0, z_y = 0, z_{xy} = 0; z_{xx} = \frac{1}{(R_N)_1}; z_{yy} = \frac{1}{(R_N)_2}, \quad (35)$$

pričom z_{xx} , z_{yy} z {35} sú pre daný dotykový bod konštantami. V dôsledku {35} je v rovnici {22} $dz = 0$ a rovnica {23} kvadratického okolia bude mať tvar

$$Dz = (1/2) [z_{xx}d\xi^2 + z_{yy}d\eta^2] = \frac{d\xi^2}{2(R_N)_1} + \frac{d\eta^2}{2(R_N)_2}, \quad (36)$$

kde Dz , $d\xi$, $d\eta$ sú premenné súradnice bodov z kvadratického okolia, ktoré sú blízke k dotykovému bodu A_i'' . Rovnica {36} je súčasne rovnicou oskulačného paraboloidu s vrcholom v tomto dotykovom bode, pričom dotyková rovina {24} k topografickej ploche v tomto bode je zároveň dotykovou rovinou k oskulačnému paraboloidu v jeho vrchole. Vrcholová časť oskulačného paraboloidu {36} je v okolí bodu A_i'' totožná s topografickou plochou. Mimo okolia je však rozdielna. Rovnicu celého oskulačného paraboloidu vyjadríme v tvare

$$z_N = \frac{\xi^2}{2(R_N)_1} + \frac{\eta^2}{2(R_N)_2}, \quad (37)$$

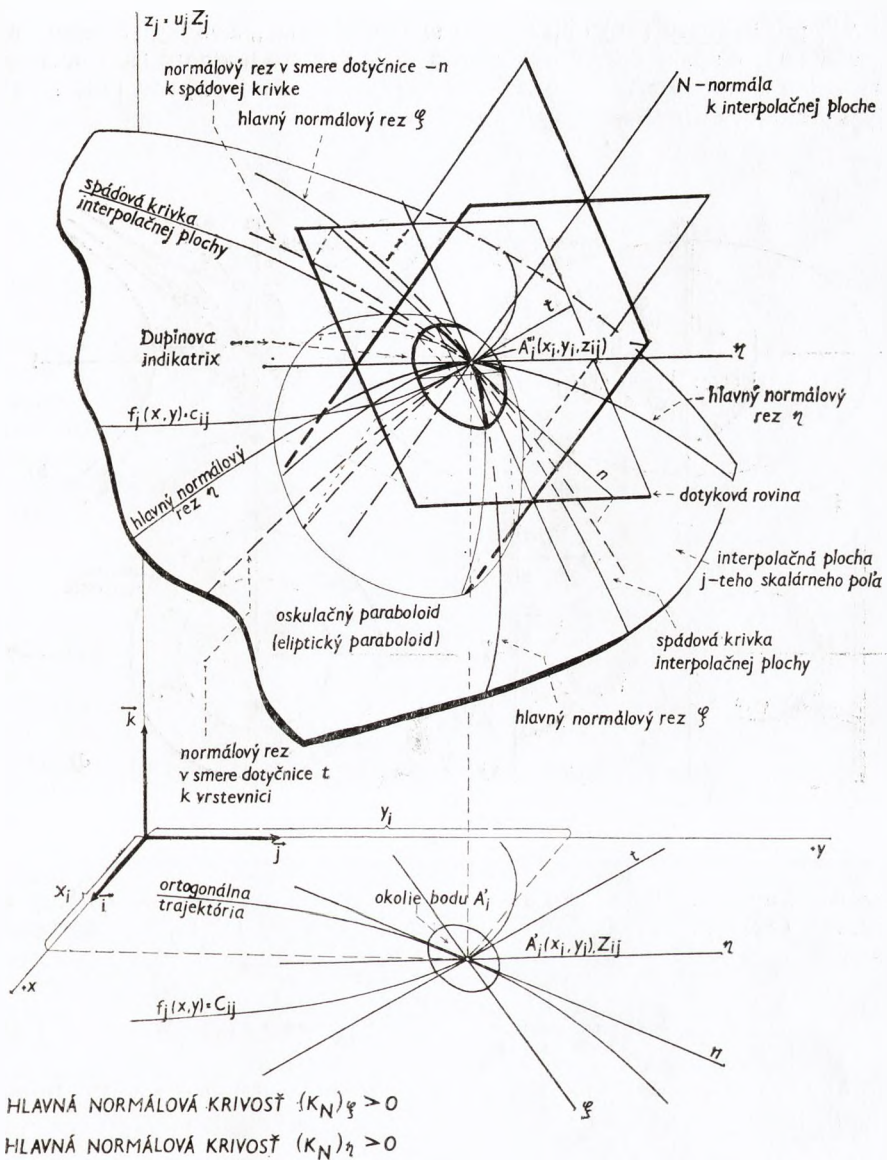
v ktorej súradnice ξ , η nadobúdajú v tomto prípade všetky hodnoty, t. j. aj hodnoty pre body mimo kvadratického okolia bodu A_i'' .

Tvar a vlastnosti oskulačného paraboloidu {37} v kvadratickom okolí zvoleného dotykového bodu A_i'' topografickej plochy závisia teda od tvaru tejto plochy, ktorý je určený priebehom normálovej krivosti {28} v závislosti od zmeny premenného parametra m . V zmysle prác [7, 13, 18] kvadratické okolia na nejakej ploche sú jej zakrivenými elementami a stotožňujú sa so zakrivenými elementami oskulačného paraboloidu okolo jeho vrchola (obr. 1).

Vlastnosti bodov topografickej plochy a jej skalárneho poľa výšok charakterizované podmienkami {29} až {32}, podľa ktorých tieto body možno rozlíšiť ako eliptické, hyperbolické, parabolické, kruhové, vyjadruje v diferenciálnej geometrii Dupinova indikatrix. Preto vzťah {28} pre priebeh normálovej krivosti $K_{N,m} = 1/R_{N,m}$ v závislosti od priebehu parametra m vyjadríme teraz v súradnicovej sústave $\langle O, \xi, \eta \rangle$ ležiacej v dotykovvej rovine {24}, v ktorej premenný parameter $m = \operatorname{tg}\varphi$, kde φ je smerový uhol zovretý v dotykovvej rovine {24} dotyčnicou normáloveho rezu s osou ξ . Vzhľadom na $m = \operatorname{tg}\varphi$ a vzhľadom na {35} vzťah {28} nadobudne v súradnicovej sústave $\langle O, \xi, \eta \rangle$ tvar

$$(K_N)_m = \frac{1}{(R_N)_m} = \frac{\cos^2\varphi}{(R_N)_1} + \frac{\sin^2\varphi}{(R_N)_2}. \quad (38)$$

Týmto vzťahom je v súradnicovej sústave $\langle A_i'', \xi, \eta \rangle$ v dotykovvej rovine {24} explicitne vyjadrená závislosť $(K_N)_m = 1/(R_N)_m$ na uhle $\varphi \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$. Táto závislosť je v dotykovvej rovine {24} graficky vyjadrená krivkou opísanou sprievodičom

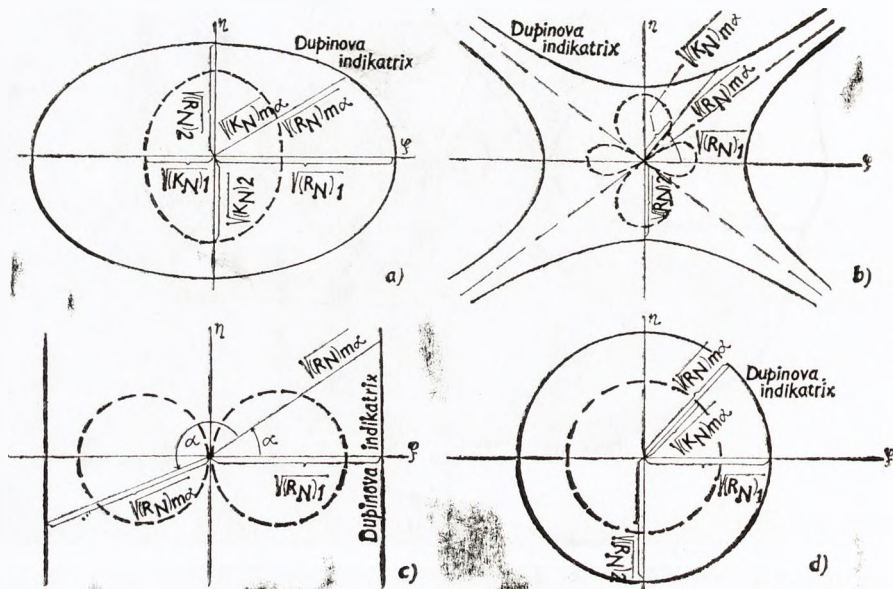


Obr. 1.

$$\overline{\sqrt{(K_N)_m}} = \frac{1}{\sqrt{(R_N)_m}} = \frac{\sqrt{(R_N)_2 \cos^2 \varphi + (R_N)_1 \sin^2 \varphi}}{(R_N)_1 \cdot (R_N)_2} \quad (39)$$

Sprievodič (39) opíše pre hodnoty (29) vždy elipsu so stredom v bode A_j , pre hodnoty (30) opíše dvojicu združených slučiek v tvare „osmičiek“ s prieseční-

kom A_i^* , pre hodnoty [31] opíše jednu slučku v tvare „osmičky“ tvorenej dvomi kružnicami v spoločnom dotykovom bode A_i^* a pre hodnoty [32] opíše jednu kružnicu so stredom v bode A_i^* . To je pre jednotlivé prípady [29] až [32] spolu s Dupinovou indikatrix vyjadrené na obr. 2.



Obr. 2.

Rovnicu Dupinovej indikatrix dostaneme v súradnicovej sústave $\langle O, \xi, \eta \rangle$ tiež zo vzťahu [38] jeho vynásobením polomerom krivosti $\{R_N\}_m$, čím dostaneme rovnicu

$$1 = \frac{\{R_N\}_m \cos^2 \varphi}{\{R_N\}_1} + \frac{\{R_N\}_m \sin^2 \varphi}{\{R_N\}_2}, \quad (40)$$

v ktorej $\{R_N\}_m \cos^2 \varphi = \xi^2$, $\{R_N\}_m \sin^2 \varphi = \eta^2$, takže dostaneme rovnicu Dupinovej indikatrix v tvare

$$\frac{\xi^2}{\{R_N\}_1} + \frac{\eta^2}{\{R_N\}_2} = 1. \quad (41)$$

Dupinova indikatrix je v dotykovvej rovine opísaná sprievodičom

$$\rho = \sqrt{\{R_N\}_m} = \sqrt{\frac{\{R_N\}_1 \{R_N\}_2}{\{R_N\}_2 \cos^2 \varphi + \{R_N\}_1 \sin^2 \varphi}}, \quad (42)$$

ktorý je prevrátenou hodnotou sprievodiča [39]. Dupinova indikatrix opísaná

sprievodičom ρ (42) je spolu s krivkou opísanou sprievodičom [39] vyjadrená podľa jednotlivých prípadov (29) až (32) na obr. 2a, b, c, d.

Vyjadrime teraz stručne v súradnicovej sústave $\langle O, \xi, \eta, z_N \rangle$ vzťah Dupinovej indikatrix (41) oskulačnému paraboloidu (37) v bode A_i'' topografickej plochy. Ak (37) násobíme $1/(z_N)$, dostaneme rovnicu

$$\frac{\xi^2}{2z_N(R_N)_1} + \frac{\eta^2}{2z_N(R_N)_2} = 1, \quad (43)$$

ktorá je na oskulačnom paraboloidu (37) pre každé jedno volené $z_N \equiv c_N =$ = konšt. rovnicou rovinnej krivky, paralelnej s dotykovou rovinou (24). Každá táto krivka je priesečnicou plochy oskulačného paraboloidu (37) s rovinou vedenou rovnobežne s dotykovou rovinou (24) k bodu A_i'' vo vzdialenosti $z_N \equiv c_N$ v smere normály N k topografickej ploche. Pre všetky zvolené $z_N \equiv c_N$ dostávame tak na oskulačnom paraboloidu množinu kriviek, ktoré v priemete do dotykovej roviny (24) v smere normály N tvoria v tejto rovine množinu kriviek so spoločným stredom A_i'' . Z nich sú pre nás dôležité tie krivky, pre ktoré je v (43)

$$\xi \leq \Delta\xi; \quad \eta \leq \Delta\eta; \quad z_N \leq \Delta z_N = 0,5.$$

Pre hodnotu $\Delta z = 0,5$ dostávame totiž na oskulačnom paraboloidu (37) krivku, ktorá je v priemete do dotykovej roviny v smere normály N totožná s Dupinovou indikatrix (41).

Všetky tie krivky, pre ktoré $\Delta z_N \equiv \Delta c_N < 0,5$ sú na oskulačnom paraboloidu (37) krivkami v jeho vrcholovej oblasti, ktorá zapadá do kvadratického okolia topografickej plochy. To znamená, že každá z nich je zároveň priesečnicou topografickej plochy s rovinou vedenou rovnobežne s dotykovou rovinou tejto plochy vo vzdialenosti $\Delta z_N \equiv \Delta c_N < 0,5$ v smere normály N . V priemete do dotykovej roviny v smere normály N sa nachádzajú vo vnútri Dupinovej indikatrix a majú spoločný stred A_i'' (pozri tiež obr. 9 práce [11]). Oskulačný paraboloid má teda svoju vrcholovú časť ohraničenú krivkou (43 s hodnotou $\Delta z_N \equiv \Delta c_N = 0,5$. Táto časť je totožná (v jej okrajových častiach takmer totožná) s topografickou plochou.

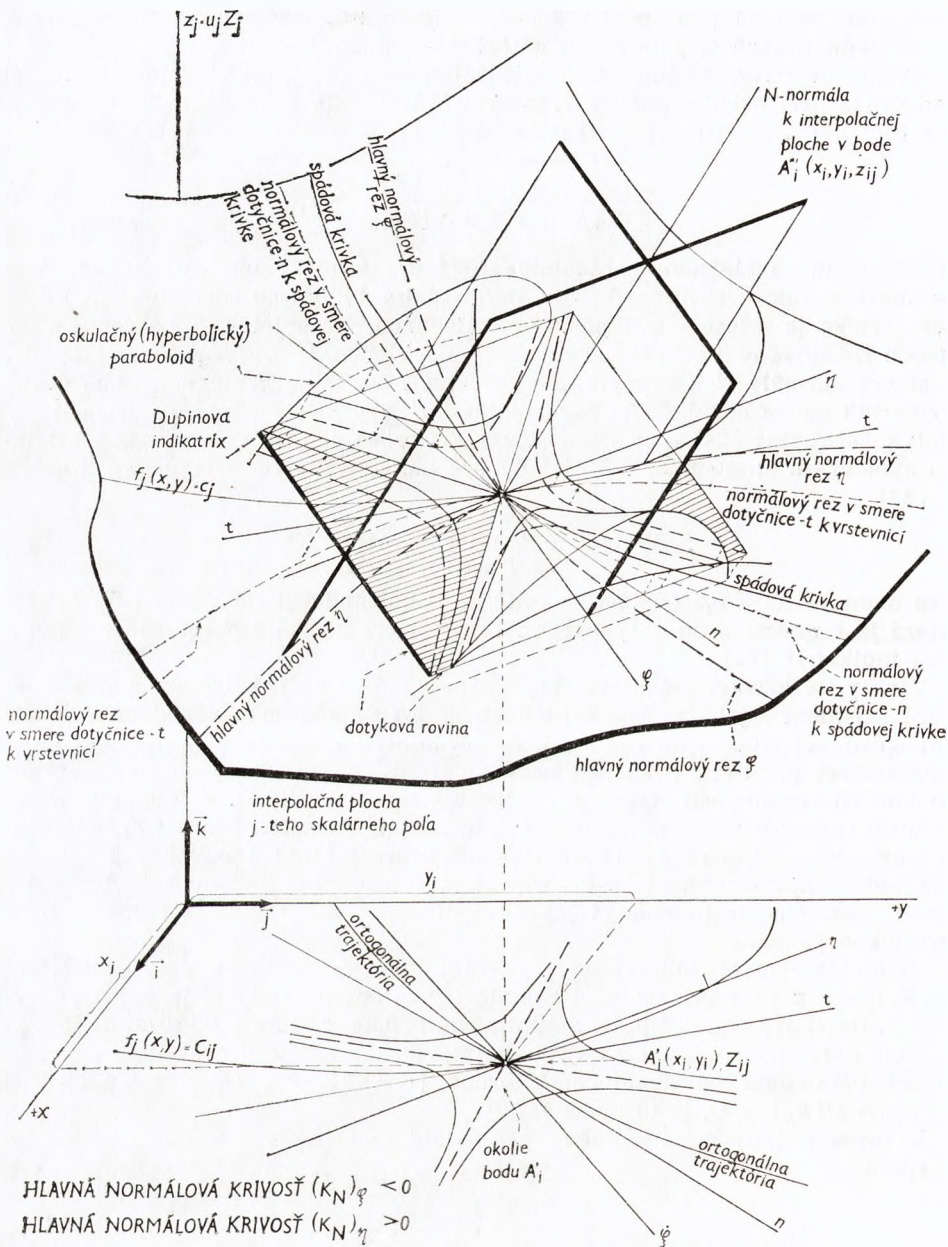
Vzťah Dupinovej indikatrix k oskulačnému paraboloidu pre $1/(R_N)_1 > 0$, $1/(R_N)_2 > 0$ z (29) pri zvolenej orientácii vektora normály N je vyjadrený na obr. 1. Dotykový bod A_i'' je teda eliptickým bodom, v ktorom $D_2 = LN - M^2 > 0$, pričom dotyková rovina leží na „vonkajšej“ strane topografickej plochy a oskulačný paraboloid na „vnútornej“ strane (obr. 1). Pre $(K_N)_1 = 1/(R_N)_1 > 0$, $(K_N)_2 = 1/(R_N)_2 > 0$, je to opačne.

V prípade (30) má oskulačný paraboloid tvar hyperbolického paraboloidu o rovnici

$$z_N = \frac{\xi^2}{2(R_N)_1} - \frac{\eta^2}{2(R_N)_2} \quad \text{pre} \quad \frac{1}{(R_N)_1} > 0 \wedge \frac{1}{(R_N)_2} < 0, \quad (44)$$

čo je graficky vyjadrené na obr. 3, a o rovnici

$$z_N = -\frac{\xi^2}{2(R_N)_1} + \frac{\eta^2}{2(R_N)_2} \quad \text{pre} \quad \frac{1}{(R_N)_1} < 0 \wedge \frac{1}{(R_N)_2} > 0. \quad (45)$$



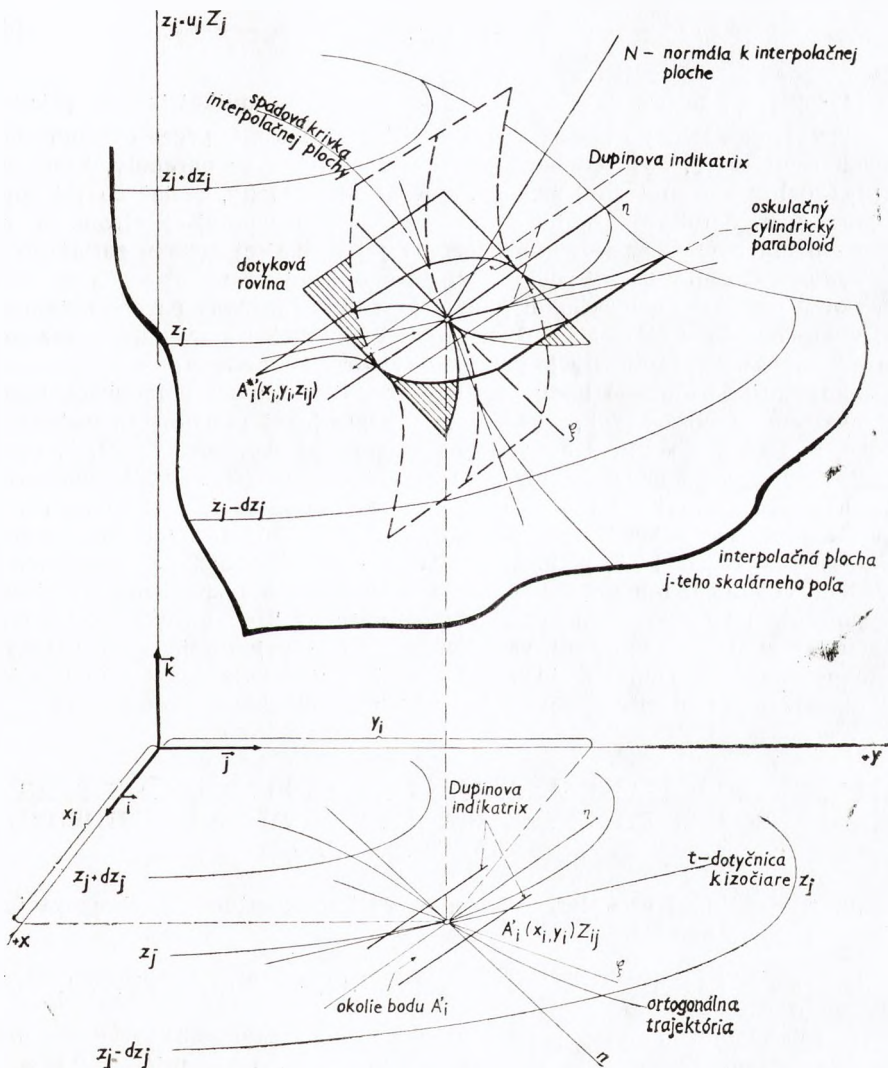
Obr. 3.

Zo (44) plynie, že pre $z_N = +0,5$ má Dupinova indikatrix tvar hyperboly s hlavnou osou ξ a pre $z_N = -0,5$ má tvar hyperboly s hlavnou osou η . V prípade

(45) je to opačne. Zo (41), ale aj zo (43) plynie, že asymptoty Dupinovej indikatrix majú smernice

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{(R_N)_2}{(R_N)_1}}. \quad (46)$$

Dotyková rovina (24) pretína topografickú plochu v krivke, ktorá v kvadratickom okolí bodu A_i^* splýva s asymptotami Dupinovej indikatrix.



Obr. 4.

V prípade (31) je jeden z hlavných polomerov krivostí nekonečne veľký, t. j. normálová krivost' je nulová. V našom prípade je to polomer $(R_N)_2 = \infty$ a normálová krivost' $[K_N]_2 = 1/(R_N)_2 = 0$. Oskulačný paraboloid (37) má teraz v okolí bodu A_i'' tvar parabolického cylindra, ktorého všetky rezy určené rovinami vedenými rovnobežne s normálovou rovinou $\{\xi, z_N\}$ v diferenciálne malej vzdialenosti $d\eta$ majú tvar paraboly o rovnici

$$z_N = \frac{\xi^2}{2(R_N)_1} \text{ pre } \frac{1}{(R_N)_1} > 0 \wedge \frac{1}{(R_N)_2} = 0, \quad (47)$$

$$z_N = -\frac{\eta^2}{2(R_N)_1} \text{ pre } \frac{1}{(R_N)_1} < 0 \wedge \frac{1}{(R_N)_2} = 0. \quad (48)$$

Zo (47) plynie, že pre $z_N \equiv c_N = \pm 0,5$ má Dupinova indikatrix tvar priamky $\xi = \pm \sqrt{(R_N)_1}$ paralelnej s osou η . Topografická plocha má v reze určenom normálovou rovinou $\{\xi, z_N\}$ prechádzajúcou bodom A_i'' tvar paraboly, ktorá pre $1/(R_N)_1 > 0$ leží na vnútornej strane topografickej plochy, zatiaľ čo jej odpovedajúca časť dotykovej roviny (24) leží na jej vonkajšej strane a pre $1/(R_N)_1 < 0$ má tvar paraboly, ktorá leží na jej vonkajšej strane, zatiaľ čo jej odpovedajúca časť dotykovej roviny leží na vnútornej strane.

Dotykový bod A_i'' topografickej plochy je v tomto prípade parabolickým bodom, v ktorom $D_2 = LN - M^2 = 0$. Parabolický cylinder s uvedeným rezom v bode A_i'' topografickej plochy je graficky vyjadrený na obr. 4.

Pre singulárne izolované body pozitívne, negatívne a pre singulárne dvojité body skalárneho poľa výšok, ktorým na topografickej ploche odpovedajú vrcholové, depresné a sedlové body, je os z_N súradnicovej sústavy $\langle O, \xi, \eta, z_N \rangle$ paralelná s osou z karteziánskej súradnicovej sústavy $\langle O, x, y, z \rangle$ zobrazovacieho priestoru a dotyková rovina (24) je paralelná so skalárnou bázou $\langle x, y \rangle$. Preto všetky krivky v kvadratických okoliach týchto singulárnych bodov s hodnotami $\Delta z_N \equiv \Delta c_N \leq +0,5$, príp. $\Delta z_N \equiv \Delta c_N \geq -0,5$ sú totožné s vrstevnicami.

Uvedené vlastnosti topografickej plochy sú pre nás dôležité jednak z hľadiska vyjadrenia jej štruktúrnych vlastností, štruktúrnych skalárnych polí v morfometrickej analýze georeliéfu vrátane exaktného vyjadrenia geometrických foriem georeliéfu a jednak z hľadiska modelovania skalárneho poľa výšok a jeho topografickej plochy aproximujúcimi funkciami dvoch premenných.

ŠTRUKTÚRNE POLIA SKALÁRNEHO POĽA VÝŠOK A GEOMETRICKÉ FORMY GEORELIÉFU Z HLADISKA ICH VPLYVU NA PRIESTOROVÚ DIFERENCIÁCIU PROCESOV

Štruktúrne polia sú v skalárnej báze $\langle x, y \rangle$ kartografického zobrazovacieho priestoru tvorené množinou

$$G_{RF}(P') = \{\Delta z(\Delta P'), \gamma_N(P'), A_N(P'), \omega(P'), K_r(P'), K_N(P'), \dots\}, \quad (44)$$

ktorá je zobrazením množiny (3) z reálneho priestoru do zobrazovacieho priestoru bez parametra času T , t. j. $G_{RF}(P, T) \rightarrow G_{RF}(P')$, pričom $P = \varphi, \lambda, h: \rightarrow P' = x, y, z$. Parameter času T , ktorý je pre časový interval $\Delta T = 10, 30$,

50, 100 rokov v závislosti od mierky 1 : M_i považovaný za konštantu, nie je v [44] obsiahnutý. Morfometrické parametre georeliéfu γ_N, A_N, \dots zo [44] sú v zmysle prác [6, 7, 11, 13] udané vzťahmi

$$\operatorname{tg} \gamma_N = |\operatorname{grad} z| = \sqrt{z_x^2 + z_y^2} \Rightarrow \gamma_N = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{z_x^2 + z_y^2}, \quad (45)$$

$$\operatorname{tg} A_N = \frac{z_y}{z_x} \Rightarrow A_N = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z_y}{z_x} \right), \quad (46)$$

$$\omega = - \frac{z_x^2 z_{xx} + 2 z_{xy} z_x z_y + z_y^2 z_{yy}}{(z_x^2 + z_y^2) \sqrt{(1 + z_x^2 + z_y^2)^3}}, \quad (47)$$

$$\{K_N\}_t = - \frac{z_{xx} z_y^2 - 2 z_{xy} z_x z_y + z_{yy} z_x^2}{(z_x^2 + z_y^2) \sqrt{(1 + z_x^2 + z_y^2)^3}}, \quad (48)$$

$$K_r = \frac{\{K_N\}_t}{\sin \gamma_N} = \frac{z_y^2 z_{xx} + 2 z_{xy} z_x z_y + z_x^2 z_{yy}}{\sqrt{(z_x^2 + z_y^2)^3}}, \quad (49)$$

v ktorých parciálne derivácie (31) vystupujú ako funkcie polohy x, y . To znamená, že každá jedna z parciálnych derivácií (21) nadobúda v každom jednom bode A_i' v skalárnej báze a v jemu odpovedajúcom bode A_i'' na topografickej ploche určitú jednoznačnú konečnú hodnotu, ktorá sa mení so zmenou polohy z jedného bodu skalárnej bázy do druhého. Jednotlivé parciálne derivácie (21) tvoria tak v skalárnej báze jednotlivé polia. V závislosti na zmenách parciálnych derivácií (21) sa teda v skalárnej báze menia so zmenou polohy x, y aj veľkosti jednotlivých morfometrických parametrov (45) až (49), takže vytvárajú v skalárnej báze jednotlivé štruktúrne skalárne polia pôvodného skalárneho poľa výšok (19). Vzťahy (45) až (49) môžeme tiež vyjadriť v tvare všeobecných funkcií

$$\gamma_N = f_{\gamma_N}(x, y), \quad A_N = f_{A_N}(x, y), \quad \omega = f_{\omega}(x, y), \quad K_{N,t} = f_{K_{N,t}}(x, y), \quad (50)$$

$$K_r = f_{K_r}(x, y), \dots$$

ktoré sú štruktúrnymi funkciami funkcie (19).

Vzťahy (47), (48) dostaneme zo vzťahu (28), ktorým je v kvadratickom okolí ľubovoľného bodu A_i'' topografickej plochy určená normálová krivosť ľubovoľnej krivky tejto plochy, ktorá prechádza bodom A_i'' a má v ňom smernicu dotyčnice $m = \operatorname{tg} \alpha$.

Nás však zo všetkých kriviek na topografickej ploche prechádzajúcich jej zvoleným bodom A_i'' zaujímajú predovšetkým krivky jej ortogonálnej siete, ktorá je tvorená spádovými krivkami a vrstevnicami. Je to preto, že v smere spádových kriviek prebiehajú procesy svahovej modelácie georeliéfu. Na konvexných formách georeliéfu v smere spádových kriviek prebiehajú erózne procesy a na konkávných formách v smere spádových kriviek prebiehajú akumulčné procesy svahovej modelácie. Pritom však záleží aj na samotnej hodnote sklonu γ_N v smere spádových kriviek, ako aj na orientácii georeliéfu voči svetovým stranám.

V dôsledku režimu modelačných procesov a ich priebehu má normálová krivosť topografickej plochy v smere spádových kriviek a normálová krivosť v

smere dotyčnic k vrstevniciam prvoradý význam z hľadiska charakteristiky a režimu procesov svahovej modelácie.

Ak teda vo vzťahu [28] dosadíme za premenný parameter m hodnotu smernice dotyčnice k spádovej krivke $n = z_y/z_x$, t. j.

$$m = n = z_y/z_x, \quad (51)$$

dostaneme vzťah pre krivosť normálového rezu $\{K_N\}_n$ topografickej plochy v smere jej spádovej krivky v bode A_i'' , ktorý znie

$$\{K_N\}_n = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \cdot \frac{z_{xx}z_x^2 + 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}z_y^2}{(1 + z_x^2)z_x^2 + 2z_x^2z_y^2 + (1 + z_y^2)z_y^2}. \quad (52)$$

Pre menovateľ vo vzťahu [52] platí, že

$$(1 + z_x^2) + 2z_x^2z_y^2 + (1 + z_y^2)z_y^2 = (z_x^2 + z_y^2)(1 + z_x^2 + z_y^2),$$

takže z [52] po úprave dostaneme vzťah (47) pre $\omega = \{K_N\}_n$. Vzťah pre normálovú krivosť ω v smere spádovej krivky bol ešte iným spôsobom odvodený v [7]. Definícia normálovej krivosti topografickej plochy georeliéfu bola podaná v prácach [7, 13]. Vo vzťahu (47) je na pravej strane znamienko (—) preto, že formy topografickej plochy georeliéfu boli definované vzhľadom na smer vektora normály N k topografickej ploche orientovaného na vonkajšiu stranu topografickej plochy.

Konvexné formy v smere spádových kriviek, pre ktoré je $\omega > 0$, sú oddelené od konkávnych foriem, pre ktoré je $\omega < 0$ v bode s hodnotou $\omega = 0$, v ktorom vzťah (47) má tvar

$$z_{xx}z_x^2 + 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}z_y^2 = 0, \quad (53)$$

čo je zároveň rovnica nulovej normálovej krivosti georeliéfu. Bod, v ktorom platí (53) je tzv. parabolický bod topografickej plochy a jej skalárneho poľa a izočiaru nulovej normálovej krivosti reliéfu je tzv. parabolická čiara [7, 13, 18]. V ňom má oskulačný paraboloid tvar parabolického cylindra.

Ak vo vzťahu [28] za premenný parameter dosadíme hodnotu smernice dotyčnice k_t k vrstevnici, t. j.

$$m = k_t = -z_x/z_y, \quad (54)$$

dostaneme v bode A_i''' krivosť normálového rezu $\{K_N\}_t$ v smere dotyčnice k vrstevnici v tvare (48). V (48) je však na pravej strane znamienko (—) vzhľadom na orientáciu jednotkového vektora normály N na vonkajšiu stranu k topografickej ploche. Pre konvexné normálové formy v smere dotyčnice k_t k vrstevnici platí, že $\{K_N\}_t > 0$ a pre konkávne normálové formy v smere dotyčnice k_t k vrstevnici platí, že $\{K_N\}_t < 0$.

Z hľadiska procesov svahovej modelácie je však dôležitá tzv. horizontálna krivosť K_r , ktorá bola odvodená v práci [7] a ktorá v diferenciálnej geometrii nebýva opísaná. Z hľadiska modelačných procesov je však ako morfometrická veličina dôležitá. Podrobne sa týmto problémom zaoberáme tiež v práci [13]. Stručne však poznamenajme, že vzťah (49) pre horizontálnu krivosť K_r tiež

dostaneme, ak vzťah pre normálovú krivosť v smere dotyčnice k vrstevnici $(K_N)_t$ násobíme vzťahom

$$\sin \gamma_N = \frac{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad (55)$$

kde γ_N je uhol sklonu v smere spádovej krivky topografickej plochy georeliéfu.

Normálová krivosť v smere dotyčnice k vrstevnici $(K_N)_t$ a horizontálna krivosť K_r sú rovné nule v navzájom spoločnom bode A_i^{**} , v ktorom majú vzťahy (48), (49) pre $(K_N)_t = 0$, $K_r = 0$ rovnaký tvar

$$z_{xx}z_y^2 - 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}z_x^2 = 0. \quad (56)$$

Rovnica (56) je súčasne rovnicou nulovej normálovej krivosti v smere dotyčnice k vrstevnici $(K_N)_t = 0$ a nulovej horizontálnej krivosti $K_r = 0$. Konvexné formy $(K_N)_t > 0$ a $K_r > 0$ sú navzájom priestorovo totožné a to isté platí aj pre konkávne formy $(K_N)_t < 0$ a $K_r < 0$.

Z hľadiska modelačných procesov je však v každom bode A_i^{**} topografickej plochy georeliéfu dôležitý vzťah normálovej krivosti $\omega = (K_N)$ a $(K_N)_t$ k normálovej krivosti $(K_N)_\xi$ a $(K_N)_\eta$ hlavných normálových rezov v smere osí ξ , η Dupinovej indikatrix, ktorých smernice $m_1 = t_\xi = m_\xi$, $m_2 = t_\eta = m_\eta$ sú určené vzťahmi (33), (34). V smere osí ξ , η so smernicami (33), (34) nadobúdajú totiž krivosti hlavných normálových rezov

$$(K_N)_\xi = \frac{1}{(R_N)_\xi} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \cdot \frac{z_{xx} + 2z_{xy}m_\xi + z_{yy}m_\xi^2}{1 + z_x^2 + 2z_xz_y m_\xi + (1 + z_y^2)m_\xi^2} \quad (57)$$

$$(K_N)_\eta = \frac{1}{(R_N)_\eta} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \cdot \frac{z_{xx} + 2z_{xy}m_\eta + z_{yy}m_\eta^2}{1 + z_x^2 + 2z_xz_y m_\eta + (1 + z_y^2)m_\eta^2}$$

extrémne hodnoty.

Zo vzťahov (33), (34) plynie, že smernica dotyčnice k spádovej krivke $k_n = z_y/z_x$ a smernica dotyčnice k vrstevnici $k_t = -z_x/z_y$ sú odlišné od smerníc $m_1 = m_\xi$, $m_2 = m_\eta$ osí ξ , η Dupinovej indikatrix. Preto normálová krivosť $(K_N)_n = \omega$ a normálová krivosť $(K_N)_t$ nie je v danom bode A_i^{**} topografickej plochy totožná s normálovou krivosťou $(K_N)_\xi$ a normálovou krivosťou $(K_N)_\eta$ hlavných normálových rezov.

Dotyčnica n k spádovej krivke o smernici $k_n = z_x/z_y$ zvierá v danom bode s osou ξ o smernici m_ξ uhol δ_1 , pre ktorý platí, že

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{k_n - m_\xi}{k_n m_\xi + 1} = \frac{z_x [(z_{xx} - z_{yy}) - \sqrt{(z_{yy} - z_{xx})^2 + 4z_{xy}^2}] - 2z_{xy}z_x}{2z_{xy}z_x + z_x [(z_{xx} - z_{yy}) - \sqrt{(z_{yy} - z_{xx})^2 + 4z_{xy}^2}]} \quad (59)$$

a dotyčnica k vrstevnici $k_t = -z_x/z_y$ zvierá v danom bode s osou η o smernici m_η uhol δ_2 , kde

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{k_t - m_\eta}{k_t m_\eta + 1} = \frac{-z_y [(z_{xx} - z_{yy}) - \sqrt{(z_{yy} - z_{xx})^2 + 4z_{xy}^2}] - 2z_{xy}z_y}{-2z_{xy}z_y + z_x [(z_{xx} - z_{yy}) - \sqrt{(z_{yy} - z_{xx})^2 + 4z_{xy}^2}]} \quad (60)$$

Štruktúre vlastnosti funkcie skalárneho poľa výšok [19] a jeho topografickej plochy sa teda prejaví v postavení a tvare Dupinovej indikatrix v ľubovoľnom bode A_i^* topografickej plochy georeliéfu. Pretože však štruktúrne vlastnosti funkcie (19) zisťujeme pomocou aproximujúcich funkcií $z = P_i(x, y)$, kde $i = 1, 2, \dots$ je poradové číslo jednotlivých vhodných aproximujúcich funkcií, musia mať tieto funkcie čo najbližšie vlastnosti k vlastnostiam funkcie (19).

Normálová krivosť $\omega = [K_N]_n$ a horizontálna krivosť $K_r = [K_N]_t / \sin \gamma_N$ sú predpokladom pre vymedzenie geometrických foriem georeliéfu kvantitatívne charakterizovaných v tzv. fázovom priestore $\langle O, \omega, K_r \rangle$ pre každý jeden bod A_i^* topografickej plochy georeliéfu [7, 11, 13]. V zmysle prác [7, 11, 13] sú to nasledovné formy podľa jednotlivých kvadrantov fázového priestoru:

- $F_{XX} (\omega > 0, K_r > 0)$ konvex-konvexné (vypuklo-vypuklé) formy,
- $F_{KX} (\omega < 0, K_r > 0)$ konkáv-konvexné (duto-vypuklé) formy,
- $F_{KK} (\omega < 0, K_r < 0)$ konkáv-konkávne (duto-duté) formy,
- $F_{XK} (\omega > 0, K_r < 0)$ konvex-konkávne (vypuklo-duté) formy,
- $F_{LX} (\omega = 0, K_r > 0)$ lineár-konvexné (priamo-vypuklé) formy,
- $F_{LK} (\omega = 0, K_r < 0)$ lineár-konkávne (priamo-duté) formy,
- $F_{XL} (\omega > 0, K_r = 0)$ konvex-lineárne (vypuklo-priame) formy,
- $F_{KL} (\omega < 0, K_r = 0)$ konkáv-lineárne (duto-priame) formy,
- $F_{LL} (\omega = 0, K_r = 0)$ lineár-lineárne (priamo-priame) formy.

Tieto formy jednak ovplyvňujú priebeh modelačných procesov na reliéfe a jednak georeliéf prostredníctvom nich pôsobí na ostatné zložky krajiny.

Vplyv geometrických foriem georeliéfu na modelačné procesy na reliéfe charakterizoval v práci [15] J. Minár. Vplyv geometrických foriem georeliéfu na odtokový režim pôd charakterizoval v práci [17] Š. Rehák, pričom z hľadiska odtokového režimu pôd podal túto charakteristiku prvých piatich geometrických foriem:

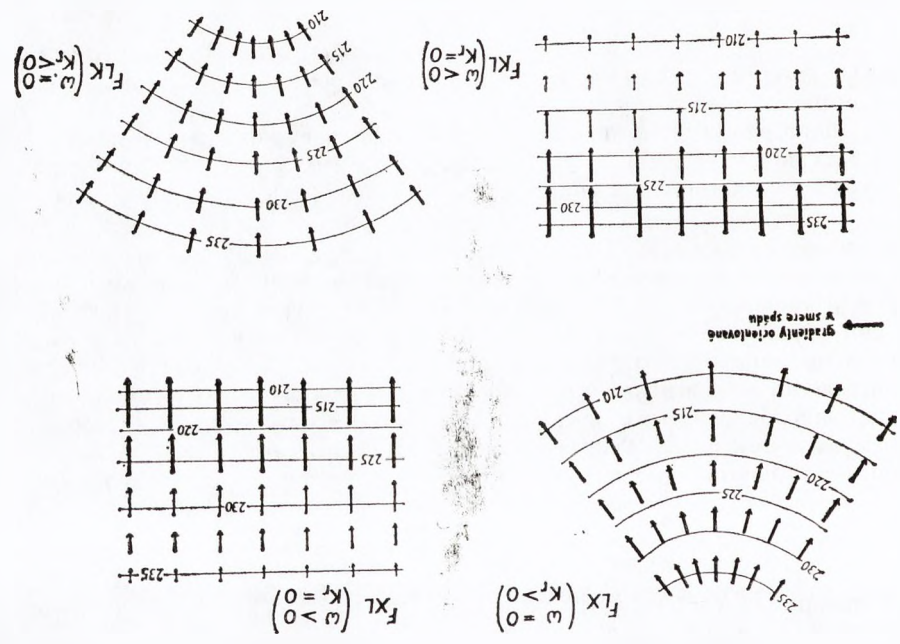
- $F_{XX} (\omega > 0, K_r > 0)$ formy urýchľujúce a rozptyľujúce odtok,
- $F_{KX} (\omega < 0, K_r > 0)$ formy spomaľujúce a rozptyľujúce odtok,
- $F_{KK} (\omega < 0, K_r < 0)$ formy spomaľujúce a sústreďujúce odtok,
- $F_{XK} (\omega > 0, K_r < 0)$ formy urýchľujúce a sústreďujúce odtok,
- $F_{LX} (\omega = 0, K_r > 0)$ formy vyrovnávajúce a rozptyľujúce odtok.

Z tohto hľadiska je však možné podať charakteristiku aj nasledujúcich štyroch geometrických foriem:

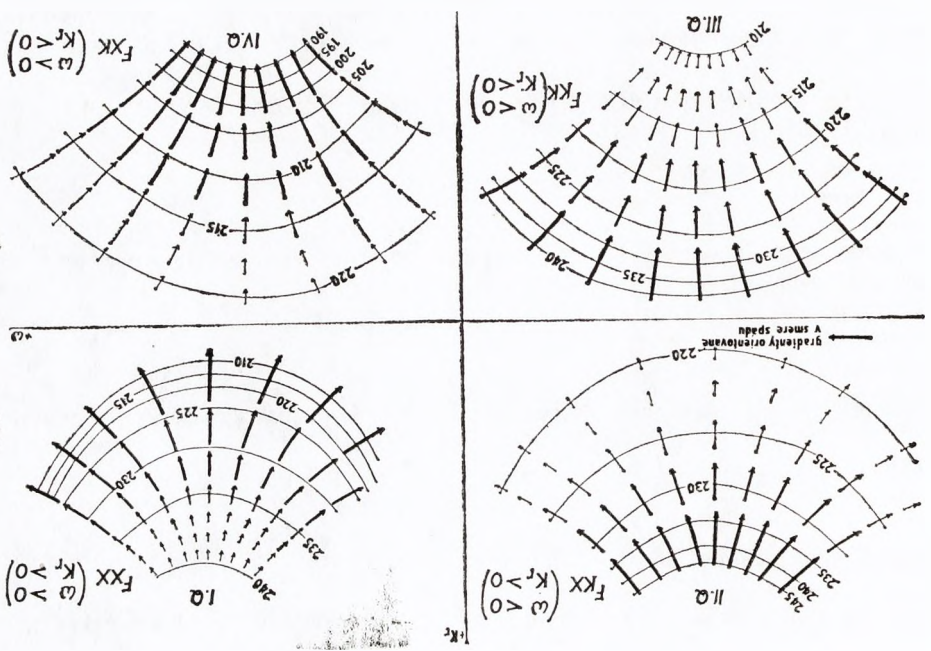
- $F_{LK} (\omega = 0, K_r < 0)$ formy vyrovnávajúce a sústreďujúce odtok,
- $F_{XL} (\omega > 0, K_r = 0)$ formy urýchľujúce a vyrovnávajúce odtok,
- $F_{KL} (\omega < 0, K_r = 0)$ formy spomaľujúce a vyrovnávajúce odtok.

Je však potrebné ešte raz pripomenúť, že pritom záleží aj na veľkosti sklonu γ_N v smere spádových kriviek a na hierarchickej úrovni uvedených foriem georeliéfu. Uvedené geometrické formy georeliéfu $F_{XX}, F_{KX}, F_{KK}, F_{XK}, F_{LX}, F_{LK}, F_{XL}, F_{KL}$ sú z hľadiska ich vplyvu na urýchlenie ($\omega > 0$), vyrovnanie ($\omega = 0, K_r = 0$), spomalenie ($\omega < 0$), rozptýlenie ($K_r > 0$), sústredenie ($K_r < 0$) odtokového režimu graficky vyjadrené na obr. 5a, b, c, d a na obr. 6a, b, c, d. Priebeh veľ-

Обр. 6.



Обр. 5.



kosti a smeru gradientov výšok — grad z je vyjadrený veľkosťou a smerom šípok.

V prácach [7, 13] bola ešte odvodená celková krivosť topografickej plochy georeliéfu v bode A_i' určená vzťahmi

$$|\vec{R}| = \sqrt{\omega^2 + K_r^2} \text{ kde } \vec{R} = \omega \vec{i} + K_r \vec{j} \quad (61)$$

a celková krivosť topografickej plochy v jej ľubovoľnom bode A_i' určená vzťahom

$$R' = \omega \cdot K_r, \quad (62)$$

pričom bol zároveň ukázaný ich vzťah ku Gaussovej celkovej krivosti. Ich významom pre modelačné procesy na georeliéfe a pre odtokový režim vody sa budeme zaoberať v samostatnej práci.

ŠTRUKTÚRNE VLASTNOSTI APROXIMUJÚCICH FUNKCIÍ A ICH VZŤAH K ŠTRUKTÚRNYM VLASTNOSTIAM FUNKCIE TOPOGRAFICKEJ PLOCHY

Vzhľadom na to, že analytické vyjadrenie funkcie skalárneho poľa výšok (19) nepoznáme, podkladom pre modelovanie tohto poľa je vstupná konečná množina bodov ${}_D E_{RF}$, ktorá tvorí vstupné, tzv. primárne diskrétné bodové pole výšok, ktoré označíme skratkou PDBP [11, 12, 13]. Na základe tejto vstupnej množiny ${}_D E_{RF}$ budeme skalárne pole výšok (19) s jeho topografickou plochou modelovať pomocou aproximujúcich (tiež interpolačných) funkcií dvoch predmených

$$z = P_i(x, y), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (63)$$

kde index i vyjadruje poradové číslo vhodnej interpolačnej funkcie. Podrobnejšie je tento problém rozobraný napr. v prácach [13, 14, 16]. Teraz si však tento problém všimame z hľadiska vzťahu štruktúrnych vlastností aproximujúcich funkcií k štruktúrnym vlastnostiam skalárneho poľa výšok a jeho topografickej plochy v jej ľubovoľnom bode A_i' . Pre úplnosť ešte poznamenajme, že aproximujúce funkcie (63) sa v literatúre z počítačovej kartografie nazývajú tiež interpoláčnymi funkciami, lebo sa pomocou nich pre ľubovoľné body $A_j \notin {}_D E_{RF}$ skalárneho poľa interpolujú neznáme hodnoty z_j skalárneho poľa výšok na základe známych hodnôt príslušných bodov zo zadaného vstupného PDBP daného množinou ${}_D E_{RF}$ [11, 13].

Aproximujúce funkcie (63) musia v zásade spĺňať podmienku, že na základe zadaného vstupného PDBP vo zvolenej mierke 1:M dostatočne presne vyjadrujú priestorové rozloženie skalárnych hodnôt skalárneho poľa výšok mimo zadaných bodov vstupného PDBP. Zároveň však musia spĺňať ďalšiu základnú podmienku, že majú v každom bode skalárnej bázy vrátane bodov zadaného vstupného PDBP parciálne derivácie

$$\frac{\partial P_i}{\partial x}; \quad \frac{\partial P_i}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2}; \dots \quad (64)$$

až do najmenej druhého rádu. To znamená, že musia mať také vlastnosti, aby z nich bolo možné v zmysle funkčných vzťahov (45) až (50) vyjadriť štruktúrne aproximujúce (interpoláčné) funkcie:

$$\begin{aligned} \gamma_N &= P_{(\gamma_N)_i}(x, y); A_N = P_{(A_N)_i}(x, y); \omega = P_{(\omega)_i}(x, y); \\ K_{Nt} &= P_{(K_{Nt})_i}(x, y); K_r = P_{(K_r)_i}(x, y), \dots \end{aligned} \quad (65)$$

pre výpočet priestorového rozloženia hodnôt jednotlivých morfometrických parametrov. Štruktúrne aproximujúce funkcie (65) sú teda významovými ekvivalentami štruktúrnych funkcií (45) až (49), (50) skalárneho poľa výšok. To znamená, že vo vzťahoch (45) až (50) namiesto prvých a druhých parciálnych derivácií (21) pôvodnej funkcie (19) vystupujú prvé a druhé parciálne derivácie (64) príslušnej i -tej aproximujúcej funkcie (63).

Ak máme teda zadané vhodné vstupné PDBP výšok tvorené množinou ${}_D E_{RF}$, potom na základe zvolenej vhodnej aproximujúcej funkcie (63) možno vypočítať podrobné rozloženie skalárov výšok mimo bodov vstupného PDBP a zároveň na základe štruktúrnych funkcií (65) i -tej aproximujúcej funkcie (63) možno vykonať výpočet všetkých morfometrických parametrov reliéfu, a teda aj morfometrickú analýzu aproximovaného skalárneho poľa výšok. Aproximujúce funkcie (63) musia byť však volené tak, aby sa svojimi štruktúrnymi vlastnosťami čo najviac približovali vlastnostiam modelovaného skalárneho poľa výšok (19).

Tak ako sa v každom bode A_i^* topografickej plochy georeliéfu a v jeho kvadratickom okolí prejavujú štruktúrne vlastnosti funkcie (19), tak isto sa v každom bode A_i^* modelujúcej (aproximujúcej) plochy prejavujú štruktúrne vlastnosti každej jednej aproximujúcej funkcie (63). Štruktúrne vlastnosti každej aproximujúcej funkcie zo (63) sa tak prejavujú v postavení a v tvare Dupinovej indikatrix v ľubovoľnom bode A_i^* aproximujúcej plochy. Ak sa štruktúrne vlastnosti zvolenej aproximujúcej funkcie zo (63) blížia k štruktúrnym vlastnostiam pôvodnej funkcie (19), potom sa Dupinova indikatrix svojím postavením a tvarom v danom bode A_i^* aproximujúcej plochy blíži k postaveniu a tvaru Dupinovej indikatrix v bode A_i^* topografickej plochy.

ZÁVER

V práci sú aparátom diferenciálnej geometrie vyjadrené štruktúrne vlastnosti topografickej plochy georeliéfu a jej skalárneho poľa výšok v ľubovoľnom bode A_i^* ako strede diferenciálne malého kvadratického okolia na topografickej ploche. Pre dvojdimenzionálne skalárne polia s prihliadnutím na skalárne pole výšok boli štruktúrne vlastnosti aparátom diferenciálnej geometrie pôvodne rozpracované B. Šalamonom v jeho prácach a výsledne zhrnuté v práci [18]. V nadväznosti na [18] bola ďalej rozpracovaná morfometrická analýza reliéfu na báze geometrického aspektu teórie polí a v priebehu rokov 1964—1973 postupne uverejňovaná v prácach [6, 7]. V práci [7] boli v nadväznosti na prácu [6] ďalej formulované geometrické formy georeliéfu, definovaný abstraktný, tzv. fázový priestor $\langle O, \omega, K_r \rangle$ ľubovoľného bodu skalárneho poľa výšok a jeho topografickej plochy a zostrojené mapy geometrických foriem, vrátane ich izočiarových polí.

Paralelne s prácou [7] bola obdobná formulácia rozpracovaná v rokoch 1971—1974 v prácach I. S. Evansa [1, 2, 3].

Ak však prihliadneme na práce B. Šalamona [18] a práce [4, 6, 7], potom je tento príspevok československej vedy v exaktnej morfofometrickej analýze na báze geometrického aspektu teórie polí pôvodný.

Poznanie štruktúrnych vlastností topografickej plochy a jej skalárneho poľa výšok vyšetrovaných aparátom diferenciálnej geometrie je dôležité z hľadiska jej modelovania, ale hlavne modelovania jej štruktúrnych polí pomocou vhodných aproximujúcich funkcií [63]. Ak majú modelované štruktúrne polia skalárneho poľa výšok spĺňať požiadavku dostatočnej presnosti, musia sa štruktúrne vlastnosti aproximujúcich funkcií čo najviac približovať štruktúrnym vlastnostiam modelovanej funkcie [19]. O spôsoboch vzájomného porovnania týchto vlastností a o stanovení miery presnosti pojednáme v samostatnej práci.

LITERATÚRA

1. EVANS, I. S.: General geomorphometry, derivatives of altitude and descriptive statistics. *Spatial Analysis in Geomorphology*, Chorley, R. J. (ed), Methuen (London), p. 17—90. — 2. EVANS, I. S., COX, N. J.: Geomorphometry and the operational definition of cirques. *Area* 6 (2), 1974, p. 150—153. — 3. EVANS, I. S.: A integrated system of terrain analysis and slope mapping. Final Reporton Da-ERO-591-73-G 0040 „Statistical characterisation of altitude matrices by computer“. Department of geography University of Durham, England 1979, p. 1—192. — 4. HAVERLÍK, I., KRCHO, J.: Mathematical generalisation of forming isoline thematic maps by computer exemplified by morphometric analysis of relief and dynamic of relief insolation. *Acta Geogr. Univ. Com., Geogr. physica*, Nr. 1, SPN Bratislava, 1973, p. 237—425. — 5. JAGODINA, L. L.: Korelacionno spektrafnyj analiz odnomernej slučajnoj funkciji relefa. *Vestnik Leningrad. univ., ser. Geologija-geografija* 24 (4), 1975, p. 124—138. — 6. KRCHO, J.: Zostrojenie máp gradientov spádu, máp izoklín a izalumklín. *Geogr. čas. SAV*, 16, č. 1, 1964, p. 61—75. — 7. KRCHO, J.: Morphometric analysis of relief on the basis of geometric aspect of field theory. *Acta geogr. UC, Geogr. phys.*, Nr. 1, Bratislava 1973, p. 1—233. — 8. KRCHO, J.: Prírodná časť geografickej sféry ako kybernetický systém a jej zobrazenie v mape. *Geogr. čas. SAV*, 20, 1968, 2, p. 115—139. — 9. KRCHO, J.: Štruktúra a priestorová diferenciácia fyzickogeografickej sféry ako kybernetického systému. *Geogr. čas. SAV*, 26, 1974, 2, p. 133—162. — 10. KRCHO, J.: Mapa ako abstraktný kartografický model S_K geografickej krajiny ako reálneho priestorového systému. *Geogr. čas. SAV*, 33, 1981, 3, p. 244—272.

11. KRCHO, J.: Matematické vlastnosti topografickej plochy georeliéfu z hľadiska morfofometrickej analýzy a jej modelovanie pomocou Komplexného digitálneho modelu. *Geogr. čas. SAV*, 39, 1987, 2, p. 169—204. — 12. KRCHO, J.: Geometrické formy georeliéfu a ich hierarchické úrovne. *Geogr. čas. SAV*, 38, 1986, 2—3, p. 210—235. — 13. KRCHO, J.: Morfofometrická analýza a digitálne modely georeliéfu. Vyd. VEDA (v tlači). — 14. MIČIETOVÁ, E., MINÁROVÁ, O.: Komplexný digitálny model reliéfu a interpoláčné metódy. *Geodet. a kartogr. obzor*, 34/76, 1988, 7, p. 165—173. — 15. MINÁR, J.: Niektoré aspekty modelovania reliéfu prostredníctvom AS KDMR so zameraním na vyčleňovanie morfortopov. Dipl. práca, Prírodoved. fakulta UK, 1986, p. 1—108. — 16. MĪTÁŠOVÁ, H.: Kartografické aspekty počítačového modelovania povrchov ako špeciálnych subsystémov geografickej sféry. Kand. diz. práca, SVF SVŠT Bratislava, 1985, p. 1—141. — 17. REHÁK, Š.: Modernizácia účelových prieskumov pôd pre hydromeliorácie. Kand. diz. práca, Výskumné centrum pôdnej úrodnosti, Bratislava, 1988, p. 1—236. — 18. ŠALAMON, B.: Das typische Isoliniengrundfeld und seine Anwendung. *Studia geophys. et geodet.*, 7, 2—4, 1963, p. 93—107, p. 313—329.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГЕОРЕЛЬЕФА С АСПЕКТОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМ И ЕГО МОДЕЛИРОВАНИЕ АППРОКСИМИРУЮЩИМИ ФУНКЦИЯМИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Исходя из источников [7, 13, 18], в настоящей статье рассматривается проблема структурных свойств георельефа в его произвольной точке A_i^{**} . Приводятся характеристики дифференциально малой квадратической окрестности произвольной точки A_i^{**} и ее свойств. Исходя из источников [6, 7, 13], в статье приведены т. наз. структурные функции георельефа, отражающие функциональные связи отдельных морфометрических параметров рельефа. Выражена связь геометрических форм георельефа в его произвольной точке со свойствами индикатрисы Дюпена. Приводятся характеристики форм георельефа, определяемые кривизной рельефа по нормали в направлении линий максимального уклона и кривизной рельефа по горизонтали, причем они приводятся в соответствие с режимом стока воды. Далее приводятся характеристики аппроксимирующих функций, моделирующих рельеф и определяющих отношение их структурных свойств к структурным свойствам функции, описывающей георельеф. Эти свойства можно взаимно сравнивать при помощи индикатрисы Дюпена.

Перевод: Л. Правдова

Jozef Krcho

MATHEMATICAL PROPERTIES OF THE GEORELIEF FROM THE VIEWPOINT OF GEOMETRIC FORMS AND ITS MODELLING BY APPROXIMATING FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

Tying up with the works [7, 13, 18] the problem of structural properties of the georelief in its arbitrary point A_i^{**} is outlined in the work. The differentially small quadratic neighbourhood of any arbitrary point A_i^{**} and its properties are characterized. Tying up with the works [6, 7, 13] the so called structural functions of the georelief are expressed, which express functional relations for the individual morphometric parameters of the relief. The relation of geometric forms of the georelief in its arbitrary point to the properties of Dupin's indicatrix is expressed. Forms of the georelief defined by means of both normal curvity of the relief in direction of gradient lines and horizontal curvity of the relief are characterized. They are given into the connection with the run-off water regime. Further, approximating functions are characterized, by which the relief is modelled. The relation of their structural properties to those of the function describing the relief is given. These properties can be compared with one other by means of Dupin's indicatrix.

Translated by A. Krajčír