

Optimálne zaist'ovacie reťazce

Galina HORÁKOVÁ – Vladimír MUCHA*

Optimal Chain of Reinsurance Protections

Abstract

Reinsurance is undoubtedly the ideal way of risk compensation. First part is dedicated to a description and analysis of various types of protections with emphasis on a graphical presentation. The second part of the article deals with the question of optimal reinsurance with the goal of ensuring that the insurer will not bear unnecessary risk. The problem of finding an optimal chain of reinsurance protection is solved with the use of collective risk models.

Keywords: *reinsurance protection, proportional and non-proportional reinsurance, quota share, surplus, priority for excess of loss, priority for stop loss, collective risk models*

JEL Classification: G22

Úvod

Zaistenie je poistenie poisťovateľa, ktorý má možnosť preniesť na zaist'ovateľa tú časť rizika, ktoré presahuje jeho finančné schopnosti, tie riziká, ktoré by mohli narušiť rovnováhu poisťného kmeňa. Zaistenie pomáha zmierňovať vplyv ekonomických a sociálnych zmien, ale aj zmien v poisťovacích metódach. Je jasné, že kvôli ochrane pred veľkým množstvom malých poisťných udalostí, rozsiahlymi poisťnými plneniami, pri tvorbe nových produktov, homogenizácii poisťného kmeňa je zaistenie pre prvopoisťovateľa veľmi potrebné. V praxi je dôležité využiť aj pre jednoduché portfólio kombinácie rôznych typov ochrán. Vzniká otázka, kedy použiť konkrétny druh zaistenia a v akom poradí jednotlivé ochrany optimálne skladať. Možno vyberať z dvoch foriem, a to obligatórneho (povinného) a fakultatívneho (dobrovoľného).

* RNDr. Galina HORÁKOVÁ, CSc. – Mgr. Vladimír MUCHA, Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky, Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava 5; e-mail: horakova@euba.sk, mucha@euba.sk

Obligatórne zaistenie sa týka poistného portfólia cedenta. Zaistná zmluva jednoznačne určuje typy poistných zmlúv, ktoré sa postupujú do zaistenia, špecifikuje výnimky. Obsahuje definíciu prijímaného rizika, podmienky zaistenia, vlastný vrub poistovateľa, limit zaistovateľa, dobu trvania krytia, špecifikuje zaistné a provízie. Zaistovateľ pri tejto forme neskúma každé riziko samostatne, nemôže riziko deklarované zmluvou odmietnuť. Teda akceptuje aj nevýhodné zmluvy, a naopak, poistovateľ posúva do zaistenia aj zmluvy, ktoré sú pre neho výhodné, lebo by ich mohol kryť sám.

Pri *fakultatívnom zaistení* poistovateľ musí zaistovateľovi poskytnúť všetky dostupné informácie tak, aby ten mohol presne zhodnotiť mieru rizika, ktoré má prebrať. Obligatórne zaistenie je založené na princípe *uberrima fides*, teda na dobrej viere cedenta poskytnúť všetky údaje o svojom poistnom kmeni, lebo zaistovateľ nemá možnosť riziká odmietnuť. Tým sa zvyšuje potenciál poistovne, poskytuje sa krytie tých rizík, ktoré nespádajú do obligatórneho zaistenia, teda umožňuje sa krytie netypických rizík, ktoré cedent nechce posunúť do obligatórneho zaistenia. Je to však na úkor zvýšených administratívnych nákladov na individuálne riziká, lebo ohodnotenie rizika je časovo náročnejšie a zmluvy sa prehodnocujú každý rok.

V praxi sa využívajú aj variácie uvedených druhov, a to fakultatívno-obligatórne, keď sa poistovateľ môže rozhodnúť, či riziko postúpi do zaistenia a ak áno, zaistovateľ ho musí prijať, naopak pri obligatórno-fakultatívnom je povinnosťou poistovateľa riziko postúpiť do zaistenia, ale zaistovateľ má právo riziko neprijať. Od druhu zaistenia sa odvíja jeho cena.

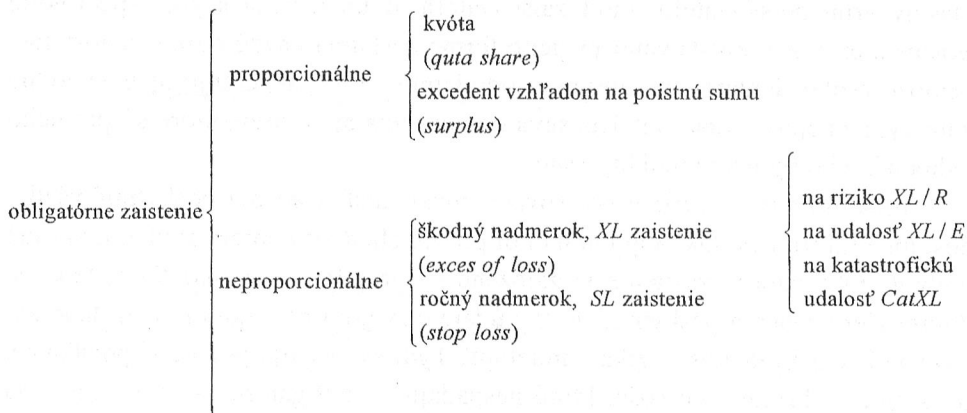
Pri obligatórnom aj fakultatívnom zaistení rozlišujeme dva základné typy: proporcionálne zaistenie a neproporcionálne zaistenie.

Proporcionálne je charakteristické delením poistnej čiastky, poistného plnenie aj poistného vopred stanoveným pomerom medzi poistovateľa a zaistovateľa, pričom tento pomer nezávisí od výšky škody. Pri *neproporcionálnom* zaistení zaistovateľ preberá po vzniku škody časť poistného plnenia poistovateľa, ktorá presiahne jeho vlastný vrub, uvedený v poistnej zmluve.

Dôležitou hodnotou pri cedovaní rizika je teda vlastný vrub poistovne, maximálna suma, ktorá sa vzťahuje na poistnú zmluvu, resp. skupinu rizík, ktorou je poistovňa pripravená participovať na krytí škody. Pri určovaní maximálneho vlastného vrubu pre rôzne riziká v praxi často víťazia empirické skúsenosti a následné rozhodnutia prijaté na najvyššej úrovni vedenia spoločnosti.

Je však možné zvoliť matematickú cestu, a to nielen pri stanovení vlastného vrubu, ale aj pri overovaní ďalších dôležitých rozhodnutí vrátane voľby programu zaistovacích ochrán. Aj pre relatívne jednoduché portfólio sa zaistenie môže stanoviť na základe skladania rôznych typov ochrán.

V praxi najčastejšie používané jednotlivé obligatórne zaistovacie ochrany, z ktorých sa následne skladajú základné zaistovacie reťazce, možno rozdeliť takto:



Pri tradičnej tvorbe reťazcov sa používa skladanie proporcionálnych, ale aj proporcionálnych a neporcionálnych ochrán v snahe riešiť otázky zaistenia tak, aby poisťovňa dosahovala čo najlepšíe výsledky.

Zaistenie excedent sa vzhľadom na poistnú sumu v kombinácii dvoch proporcionálnych ochrán takmer vždy používa na ochranu kvótového podielu. Existujú aj kombinácie neporcionálnych ochrán na riziko XL / R a nepredvídanú udalosť XL / E v prípade, že ochrana proti riziku je nezávislá a neovplyvní ochranu proti nepredvídanej udalosti, alebo napríklad kombinovanie škodného nadmerku s excedentom vzhľadom na poistnú sumu.

Ochrany môžu byť rozdelené do viacerých vrstiev, pričom každá vrstva má svoje podmienky stanovené v zaistnej zmluve. Tam sa uvádza aj úroveň, do ktorej je zaistovateľ ochotný, resp. schopný niesť riziko. Riziko presahujúce tento limit prípadne naspäť tomu, kto toto riziko preniesol do zaistenia. Reťazec ochrán však môže byť rôznorodejší, môže byť vytvorený zo škodného nadmerku po kvótovom zaistení, a opačne, z aplikácie kvótového zaistenia po škodnom nadmerku, takisto ročného nadmerku po kvótovom zaistení, ročného nadmerku po *surplus* zaistení, kvótovom zaistení po *surplus* zaistení atď.

Optimalizácia skladania reťazcov zaistovacích ochrán umožňuje prvopoisťovateľovi neniesť prebytočné riziko, ale pritom zachovať dostatočný prebytok, čo sa pozitívne premietne aj na cene ponúkaných produktov. Optimálnu skladbu zaistovacích ochrán pre konkrétne portfólio poistných zmlúv možno odvodiť matematicky, pričom výhodou je poznať zaistovací trh v praxi.

Cieľom príspevku je uviesť metódu určenia optimálneho reťazca zaistovacích ochrán. Ten odvodíme za predpokladu, že: • budeme využívať aparát kolektívneho

modelu rizika • poznáme zákonitosti skladania jednotlivých zaist'ovacích ochrán
 • určíme očakávaný zisk poisťovne • použijeme Lagrangeovu funkciu na výpočet viazaných extrémov.

Preto najskôr zadefinujme kolektívny model rizika a následne najpoužívanejšie zaist'ovacie ochrany a princíp ich skladania.

1. Kolektívny model rizika

Uvažujme portfólio poistných zmlúv, v ktorom v rámci jednej poistky môže nastať viacero poistných plnení, poistné zmluvy sú vzájomne nezávislé, každú škodu, ktorá v danom portfóliu vznikne, možno popísať náhodnou premennou X_i , ktorá vo všeobecnosti môže byť diskrétna i spojitá, počet škôd popísaný náhodnou premennou N nezávisí od výšky individuálnych poistných plnení, náhodné premenné $X_i, i = 1, 2, \dots, N$ sú identicky rozdelené a počet zmlúv v danom portfóliu sa počas sledovaného obdobia nemení. Portfólio poistných zmlúv, ktoré spĺňa uvedené predpoklady, nazveme *kolektívny model rizika*. Celková škoda pre celé portfólio je v ňom generovaná náhodným procesom. Pracovať budeme s náhodnými premennými $N, X_i (i = 1, \dots, N)$ a náhodnou premennou S , celkovou škodou, pre ktorú vzhľadom na vzťah

$$S = \sum_{i=1}^N X_i \quad (1)$$

sa dajú ľahko odvodiť číselné charakteristiky. Pre počiatočné úvahy postačí uviesť

$$E(S) = E(X) \cdot E(N) \quad (2)$$

$$D(S) = E(N) \cdot D(X) + E^2(X) \cdot D(N) \quad (3)$$

2. Analýza jednotlivých základných druhov ochrán ich skladanie

K stanoveniu optimálneho reťazca zaist'ovacích ochrán môžeme pristúpiť, ak vieme určiť charakteristiky náhodných premenných poistných plnení prvopoistovateľa aj zaist'ovateľov. Preto zadefinujeme jednotlivé ochrany, uvedieme postup a zákonitosti pri ich skladaní, pričom budeme brať do úvahy aj limit zaist'ovateľa.

2.1. Kvótové zaistenie a excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu

V *kvótovom zaistení (quota share)* sa poistná suma S , poistné plnenie X a poistné P delia medzi prvopoistovateľa a zaist'ovateľa v rovnakom pomere danom zmluvne dohodnutou kvótou q ($0 < q < 1$). Zodpovedajúce poistné plnenie a poistné, ktoré sú cedované na zaist'ovateľa, môžeme zapísať

$${}^Z S_q = (1-q)S \quad {}^Z X_q = (1-q)X \quad {}^Z P_q = (1-q)P \quad (4)$$

Pre poistné plnenie a poistné ponechané na vlastný vrub prvopoistoťovateľa platí

$${}^P S_q = qS \quad {}^P X_q = qX \quad {}^P P_q = qP \quad (5)$$

V *excedentnom zaistení (surplus)* preberá zaistoťovateľ pri každej poistnej sume tú časť nazývanú *excedent*, ktorá presahuje zmluvne dojednaný vlastný vrub prvopoistoťovateľa α , $\alpha > 0$. Pre poistnú sumu S , poistné P a poistné plnenie X v tomto prípade pre zaistoťovateľa platí

$${}^Z S_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq \alpha \\ (S - \alpha) & \text{pre } S > \alpha \end{cases} \quad {}^Z X_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq \alpha \\ \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)X & \text{pre } S > \alpha \end{cases} \quad (6)$$

$${}^Z P_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq \alpha \\ \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)P & \text{pre } S > \alpha \end{cases} \quad (7)$$

a pre prvopoistoťovateľa

$${}^P S_\alpha = \begin{cases} S & \text{pre } S \leq \alpha \\ \alpha & \text{pre } S > \alpha \end{cases} \quad {}^P X_\alpha = \begin{cases} X & \text{pre } S \leq \alpha \\ \left(\frac{\alpha}{S}\right)X & \text{pre } S > \alpha \end{cases} \quad (8)$$

$${}^P P_\alpha = \begin{cases} P & \text{pre } S \leq \alpha \\ \left(\frac{\alpha}{S}\right)P & \text{pre } S > \alpha \end{cases} \quad (9)$$

Excedentné zaistenie sa v praxi často používa, pretože ponecháva prvopoistoťovateľovi značnú voľnosť v realizácii vlastnej zaistoťovacej stratégie ochrany. Tieto dva druhy zaistenia možno vhodne skladať. Najjednoduchšou poistnou ochranou je kvótové zaistenie. To možno použiť v akomkoľvek poradí, za akoukoľvek zaistoťovacou ochranou, pretože fixné rozdelenie rizika je vždy aplikovateľné na portfólio ako celok. Excedentné zaistenie by malo byť prvé v sérii ochrán, ale práve kvótové zaistenie ho môže predchádzať. Kvóta sa vyskytuje zvyčajne iba raz v sérii ochrán, aj keď nie je vylúčené jej viacnásobné použitie. Rozdielu v poradí použitia obidvoch proporcionálnych ochrán sa budeme venovať v ďalšom texte. Najskôr však zadefinujeme limit zaistoťovateľa, ktorý sa udáva v násobkoch vlastného vrubu prvopoistoťovateľa a ktorého použitie zvyšuje počet možných skladaní uvedených ochrán.

2.2. Excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu s k -násobným limitom zaistovateľa

Podobne ako pri kvótovom zaistení, tak aj pri zaistení surplus býva ručenie zaistiteľa obmedzené limitom. To znamená, že sa ceduje maximálne čiastka dosahujúca *limit zaistovateľa*. Čiastka presahujúca jeho limit sa pridá k vlastnému vrubu cedenta, ktorý môže túto časť rizika umiestniť do ďalšieho zaistenia. Proces zaistenia surplus však býva oproti kvótovému zaisteniu zložitejší.

Limit zaistovateľa sa pri surplus zaistení udáva v násobkoch vlastného vrubu prvopoistovateľa. Väzba limitu zaistovateľa na vlastný vrub zabraňuje poisťovateľovi vyberať veľké riziká. V mnohých prípadoch toto excedentné zaistenie nezvýši kapacitu prvopoistovateľa na potrebnú úroveň a ten je nútený dojednať druhý surplus (nevyklučuje sa aj surplus vyšších rádov) u toho istého, alebo u iného zaistovateľa. Druhý excedent sa aplikuje pri tých poistných zmluvách, pri ktorých je z prvého surplus zaistenia prekročený limit. S rastom rádu tohto zaistenia sa pre zaistovateľa zhoršuje pomer medzi maximálnym ručením a zaistným, ktoré zaistovateľ prevezme.

Poznámka 1. Na sprehľadnenie jednotlivých zaistovacích procesov nebudeme slovne rozlišovať situáciu, či jednotlivé vrstvy zaistuje ten istý zaistovateľ, alebo sa na tomto procese zúčastňuje viacero zaistovateľov. Teda v našej terminológii napríklad druhého zaistovateľa Z_2 chápeme ako zaistovateľa realizujúceho v poradí druhú ochranu.

Uvažujme excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu S s k_1 -násobným limitom, druhý surplus s k_2 -násobným limitom zaistovateľa. Potom rozdelíme poistnú sumu S medzi cedenta a zaistovateľov takto:

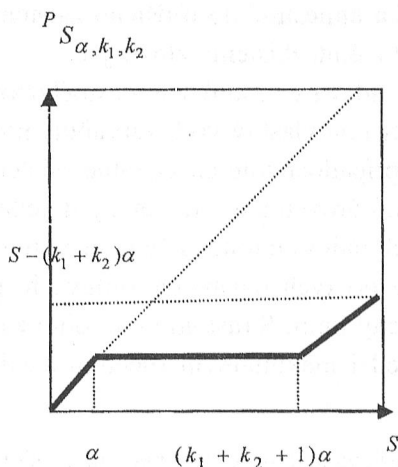
$${}^P S_{\alpha, k_1, k_2} = \begin{cases} S & \text{pre } S \leq \alpha \\ \alpha & \text{pre } \alpha < S \leq (k_1 + k_2 + 1)\alpha \\ S - (k_1 + k_2)\alpha & \text{pre } (k_1 + k_2 + 1)\alpha < S \end{cases} \quad (10)$$

$$Z_1 S_{\alpha, k_1} = \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq \alpha \\ S - \alpha & \text{pre } \alpha < S \leq (k_1 + 1)\alpha \\ k_1 \alpha & \text{pre } (k_1 + 1)\alpha < S \end{cases} \quad (11)$$

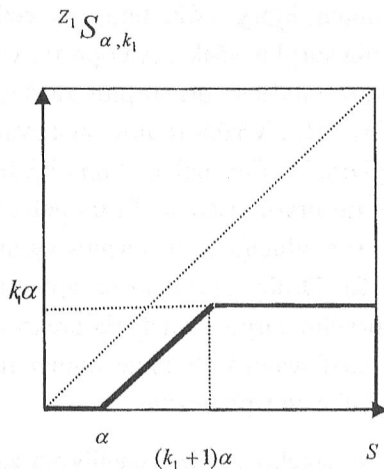
$$Z_2 S_{\alpha, k_1, k_2} = \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq (k_1 + 1)\alpha \\ S - (k_1 + 1)\alpha & \text{pre } (k_1 + 1)\alpha < S \leq (k_1 + k_2 + 1)\alpha \\ k_2 \alpha & \text{pre } (k_1 + k_2 + 1)\alpha < S \end{cases} \quad (12)$$

Grafy na obrázkoch 1 – 3 vyjadrujú, akú zodpovednosť na seba jednotlivé inštitúcie vzhľadom na poistnú sumu S berú. Na základe tohto pomeru, pri zachovaní zákonitostí zaistenia surplus, si prvopoistoiteľ a zaistovatelia rozdelia aj vzniknuté škody vyjadrené vzťahom (13 – 15).

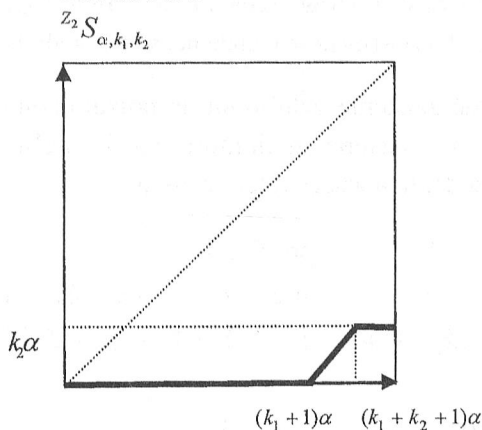
Obrázok 1



Obrázok 2



Obrázok 3



Môžeme postupovať aj tak, že v rámci zaistovacieho portfólia aplikujeme surplus s odstupňovanými (podľa potreby) vlastnými vrubmi a reťazec ukončíme fakultatívnym zaistením, čo zabezpečuje flexibilitu tohto zaistenia.

Príklad: Uvažujme excedentné zaistenie vzhľadom na poistné sumy S , ktoré sú uvedené v tabuľke 1. Utvoríme reťazec zaistovacích ochrán, ak vlastný vrub prvopoistoiteľa je 2 000 000 p. j., prvé surplusové zaistenie je s päťriadkovým limitom, druhý surplus s dvojriadkovým limitom a prípadné zvyšné riziko bude kryté fakultatívnym zaistením.

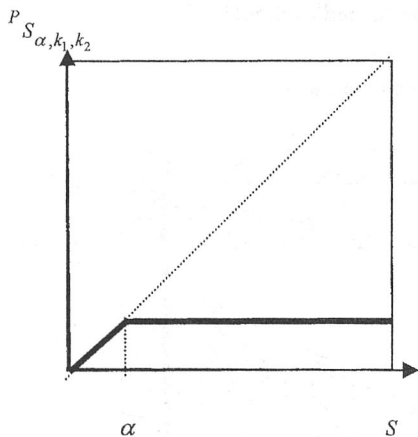
Riešenie: V našom prípade pre poistné sumy ${}^{Z_1}S_{\alpha,k_1}$ a ${}^{Z_2}S_{\alpha,k_1,k_2}$ platia grafy na obrázkoch 2 a 3. Zmení sa poistná suma cedenta, čo sa premietne do fakultatívneho zaistenia (pozri obr. 4 a 5).

$${}^P X_{\alpha,k_1,k_2} = \begin{cases} X & \text{pre } S \leq \alpha \\ \frac{\alpha}{S} X & \text{pre } \alpha < S \leq (k_1 + k_2 + 1)\alpha \\ \frac{S - \alpha(k_1 + k_2)}{S} X & \text{pre } (k_1 + k_2 + 1)\alpha < S \end{cases} \quad (13)$$

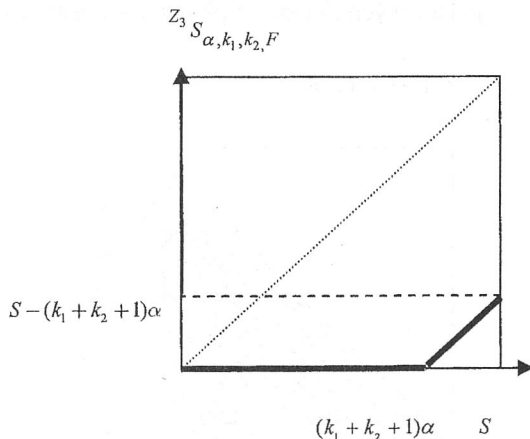
$${}^{Z_1} X_{\alpha,k_1} = \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq \alpha \\ \frac{S - \alpha}{S} X & \text{pre } \alpha < S \leq (k_1 + 1)\alpha \\ \frac{k_1 \alpha}{S} X & \text{pre } (k_1 + 1)\alpha < S \end{cases} \quad (14)$$

$${}^{Z_2} X_{\alpha,k_1,k_2} = \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq (k_1 + 1)\alpha \\ \frac{S - (k_1 + 1)\alpha}{S} X & \text{pre } (k_1 + 1)\alpha < S \leq (k_1 + k_2 + 1)\alpha \\ \frac{k_2 \alpha}{S} X & \text{pre } (k_1 + k_2 + 1)\alpha < S \end{cases} \quad (15)$$

Obrázok 4



Obrázok 5



Tabuľka 1 uvádza v každom riadku delenie danej poistnej sumy S medzi prvo-poistovateľa a zaistovateľov podľa (11), (12) a modifikovaného vzťahu (10), pričom

$$S = {}^P S_{\alpha=2\,000\,000,5,2,F} + {}^{Z_1} S_{\alpha=2\,000\,000,5} + {}^{Z_2} S_{\alpha=2\,000\,000,5,2} + {}^{Z_3} S_{\alpha=2\,000\,000,5,2,F}$$

Tabuľka 1

Celková poistná suma S v 1000 p.j.	PS cedenta ${}^P S_{\alpha=2000,5,2,F}$	PS 1. zaisťovateľa ${}^{Z_1} S_{\alpha=2000,5}$	PS 2. zaisťovateľa ${}^{Z_2} S_{\alpha=2000,5,2}$	PS 3. zaisťovateľa ${}^{Z_3} S_{\alpha=2000,5,2,F}$
900	900	0	0	0
3 000	2 000	1 000	0	0
13 000	2 000	10 000	1 000	0
16 000	2 000	10 000	4 000	0
18 000	2 000	10 000	4 000	2 000

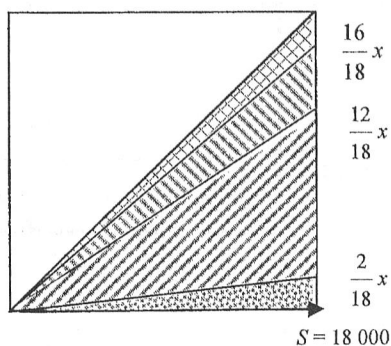
Pre jednotlivé poistné sumy sa ilustračné výšky škôd (v 1 000 p. j.) v tabuľke 2 rozdeľia podľa vzťahov (14), (15) a podľa obrázku 4 a 5 upraveného vzťahu (13) nasledovne:

Tabuľka 2

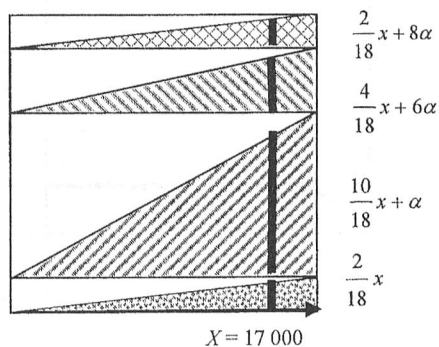
S v 1000 p.j.	Výška škody X	Výška škody cedenta ${}^P X_{\alpha=2000,5,2,F}$	Výška škody 1. zaisťovateľa ${}^{Z_1} X_{\alpha=2000,5}$	Výška škody 2. zaisťovateľa ${}^{Z_2} X_{\alpha=2000,5,2}$	Výška škody 3. zaisťovateľa ${}^{Z_3} S_{\alpha=2000,5,2,F}$
900	500	500	0	0	0
3 000	900	600	300.000	0	0
13 000	1 000	153.846	769.231	76.923	0
16 000	16 000	2 000.000	10 000.000	4 000.000	0
18 000	17 000	1 888.889	9 444.444	3 777.778	1 888.889

Obrázky 6 a 7 korešpondujú s riešením vzťahujúcim sa na poistnú sumu $S = 18\,000\,000$ p. j., uvedenú v tabuľke 1. Úsečky ■ na obrázku 7 predstavujú hodnoty jednotlivých poistných plnení uvedených v poslednom riadku tabuľky 2.

Obrázok 6



Obrázok 7



2.3. Skladanie kvótového a excedentného zaistenia vzhľadom na poistnú sumu

Kombináciou kvótového a excedentného zaistenia poistné plnenie poisťovne môžeme vyjadriť

$${}^P X_{\alpha,q} = \begin{cases} qX & \text{pre } S \leq \alpha \\ q \frac{\alpha}{S} X & \text{pre } S > \alpha \end{cases} \quad \text{resp.} \quad {}^P X_{q,\alpha} = \begin{cases} qX & \text{pre } q \cdot S \leq q \cdot \alpha \\ \frac{\alpha \cdot q}{S \cdot q} (qX) & \text{pre } q \cdot S > q \cdot \alpha \end{cases} \quad (16)$$

pretože platí

$$q \cdot X_{\alpha} = (q \cdot X)_{q\alpha} \quad (17)$$

Vzhľadom na cedované riziko, výška poistných plnení pre zaistovateľov bude popísaná náhodnými premennými

$${}^Z X_{\alpha,q} = \begin{cases} (1-q)X & \text{pre } S \leq \alpha \\ \left(1 - \frac{\alpha}{S} q\right) X & \text{pre } S > \alpha \end{cases} \quad \text{resp.} \\ {}^Z X_{q,\alpha} = \begin{cases} (1-q)X & \text{pre } q \cdot S \leq q \cdot \alpha \\ \left(1 - \frac{\alpha \cdot q}{S \cdot q} \cdot q\right) X & \text{pre } q \cdot S > q \cdot \alpha \end{cases} \quad (18)$$

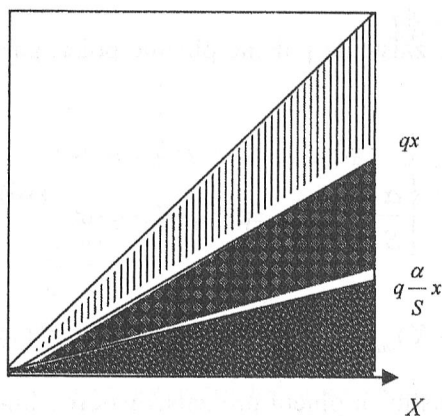
Z predchádzajúcich vzťahov vyplýva, že riziko, ktoré si ponecháva cedent, je v oboch prípadoch to isté. Táto skutočnosť vedie niekedy k omylu, že je jedno, v akom poradí sa ochrany zoradia. K tomuto názoru prispieva vzťah (18), ktorý je síce pravdivý, ale pre naše ďalšie úvahy nevyhovujúci. Špecifikujme, akú časť rizika ponesie zaistovateľ vzhľadom na kvótové a ktorú vzhľadom na surplus zaistenie.

Ak aplikujeme v poradí *prvé kvótové zaistenie*, plošný obsah znázornený na obrázkoch 8 a 9  korešponduje s výškou poistného plnenia prvého zaistovateľa. Aplikáciou *excedentného zaistenia* na zadržané riziko prvopoistovateľa plošný obsah na obrázkoch 8 a 9 vyznačený  sa vzťahuje na excedentné zaistenie. Trojuholníky označené  vyjadrujú výšku poistného plnenia prvopoistovateľa popísanú vzťahom (16) pre $S > \alpha$.

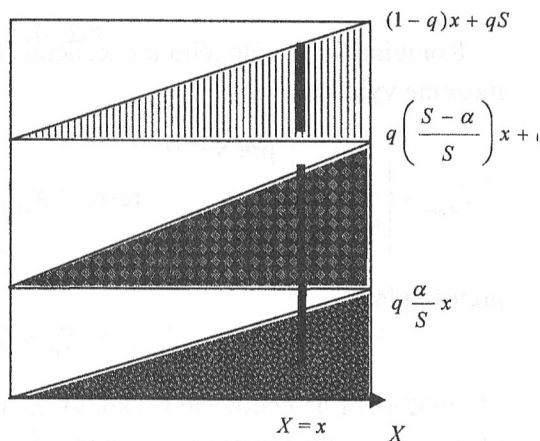
Na základe uvedeného už určíme vzťahy náhodných premenných vyjadrujúcich poistné plnenia jednotlivých zaistovateľov a to

$${}^Z_1 X_q = (1-q)X \quad {}^Z_2 X_{q,\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq \alpha \\ q \left(\frac{S-\alpha}{S} \right) X & \text{pre } S > \alpha \end{cases} \quad (19)$$

Obrázok 8

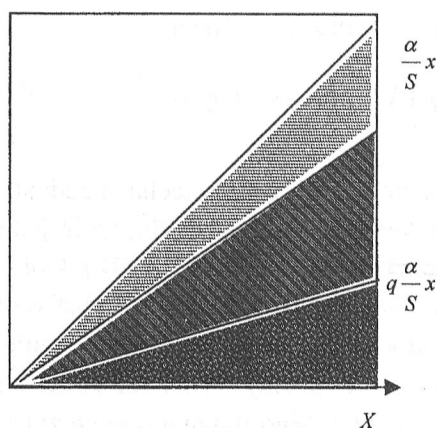


Obrázok 9

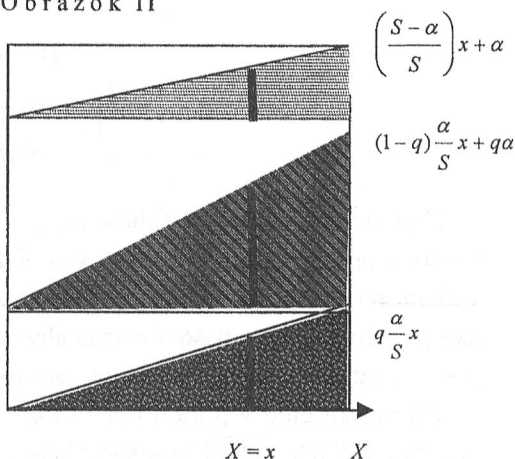


Obdobne budeme postupovať pri aplikácii kvótového zaistenia po *excedentnom* zaistení a vychádzať z obrázkov 10 a 11.

Obrázok 10



Obrázok 11



Plošný obsah  na obrázkoch 10 a 11 korešponduje s výškou poistného plnenia prvého zaistovateľa, teda s poistným plnením zaistovateľa pri zaistení surplus, popísaným náhodnou premennou ${}^Z_1 X_\alpha$. Aplikáciou kvótového zaistenia na ponechané riziko cedenta, plošný obsah vyznačený  na obrázkoch 10 a 11 sa vzťahuje na druhého zaistovateľa a vzťah (19). Výšku poistného plnenia prvopoistovateľa, popísanú vzťahom (16) pre $S > \alpha$, predstavujú trojuholníky označené .

Teda náhodné premenné poistných plnení prvého a druhého zaistovateľa majú tvar

$$z_1 X_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq \alpha \\ \left(\frac{S-\alpha}{S}\right) X & \text{pre } S > \alpha \end{cases} \quad z_2 X_{\alpha,q} = \begin{cases} (1-q)X & \text{pre } S \leq \alpha \\ (1-q) \cdot \frac{\alpha}{S} X & \text{pre } S > \alpha \end{cases} \quad (20)$$

Príklad: Pre vlastný vrub prvopoistiteľa $\alpha = 20\,000\,000$, kvótu $q = 0,2$ a poistné sumy uvedené v tabuľke 4 určíme, v akom pomere bude prvopoistovateľ a zaistovňa participovať na prípadných škodách, v prípade:

- kvótového zaistenia a následnom excedentnom zaistení vzhľadom na poistnú sumu,
- kvótového zaistenia po excedentnom zaistení vzhľadom na poistnú sumu.

Riešenie:

a) Tabuľka 3

S v 1000 p. j.	Výška škody X	Výška škody cedenta ${}^P X_{q=0,2,\alpha=2000}$	Výška škody 1. zaistovateľa $z_1 X_{q=0,2}$	Výška škody 2. zaistovateľa $z_2 X_{q=0,2,\alpha=2000}$
900	500	100	400	0
3 000	900	120	720	60
16 000	16 000	400	12 800	2 800
18 000	17 000	377,7778	13 600	3 022,2222

b) Tabuľka 4

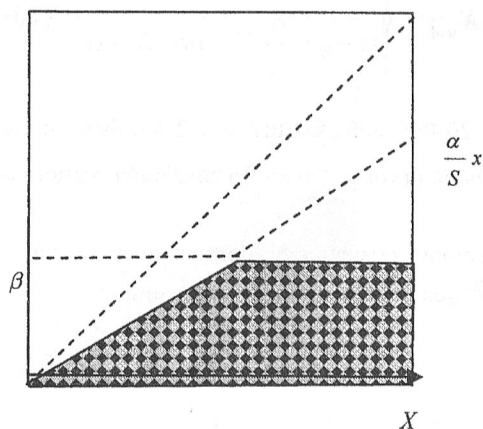
S v 1000 p. j.	Výška škody X	Výška škody cedenta ${}^P X_{\alpha=2000,q=0,2}$	Výška škody 1. zaistovateľa $z_1 X_{\alpha=2000}$	Výška škody 2. zaistovateľa $z_2 X_{\alpha=2000,q=0,2}$
900	500	100	0	400
3 000	900	120	600	480
16 000	16 000	400	14 000	1 600
18 000	17 000	377,7778	15 111,1111	1 511,1111

Poznámka 2. Hodnoty uvedené v tabuľke 3 možno získať zo vzťahov (16) a (19), resp. overiť pomocou obrázkov 8 a 9. Analogicky hodnoty v tabuľke 4 korešpondujú so vzťahmi (16) a (20) a s obrázkami 10 a 11.

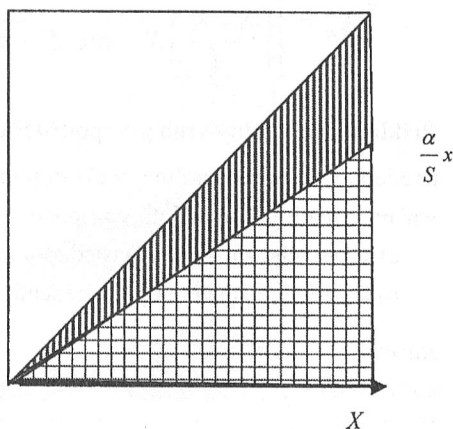
Poznámka 3. Variáciou proporcionálnej a neproporcionálnej ochrany je napríklad spojenie *excedentu vzhľadom na poistnú sumu a následnou aplikáciou zaistenia WXL/R*. Obdobne ako v predchádzajúcom prípade možno túto skladbu popísať vzťahmi aj graficky. Napríklad pre prípad, keď je $\alpha < S$, platí

$${}^P X_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \frac{\alpha}{S} & \text{pre } X \leq \frac{\beta S}{\alpha} \\ \beta & \text{pre } X > \frac{\beta S}{\alpha} \end{cases} \quad z_1 X_\alpha = \frac{S-\alpha}{S} X \quad z_2 X_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 0 & \text{pre } X \leq \frac{\beta S}{\alpha} \\ \frac{\alpha}{S} X - \beta & \text{pre } X > \frac{\beta S}{\alpha} \end{cases} \quad (21)$$

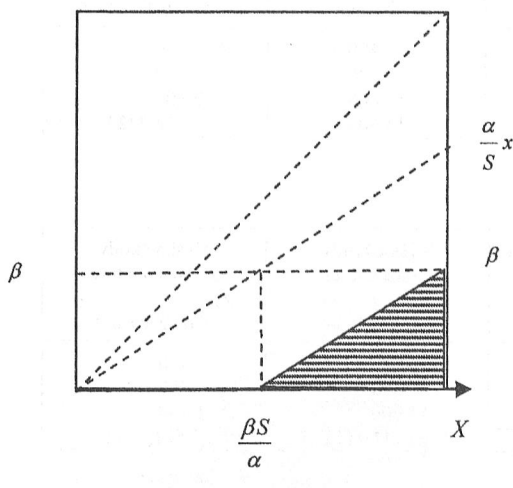
Obrázok 12



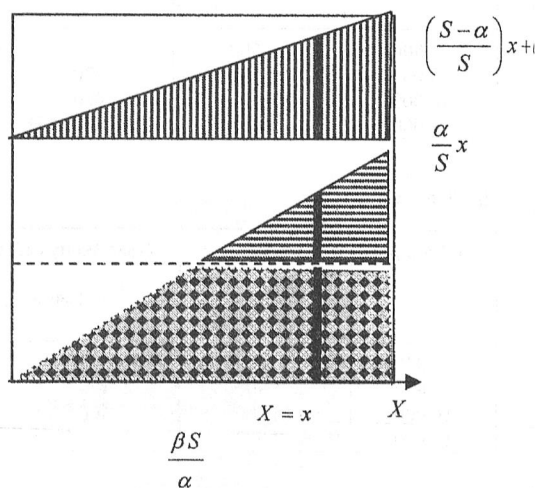
Obrázok 13



Obrázok 14



Obrázok 15



Na obrázku 12 je grafické znázornenie poistných plnení prvopoist'ovateľa po aplikácii reťazca *surplus – excess of loss*. Priamka $y = \frac{\alpha}{S}x$ na obrázku 13 roz-

deľuje riziko medzi prvopoist'ovateľa a prvého zaist'ovateľa, pričom plošný obsah vyznačený  vyjadruje časť poistných plnení, ktorú kryje cedent. Poistné plnenia, vzťahujúce sa na zaistenie surplus pre prvého zaist'ovateľa, sú vyznačené na obrázkoch 13 a 15 . Na toto ponechané riziko sa uplatní excedent vzhľadom na výšku škody. Teda plošný obsah  na obrázkoch 14 a 15 predstavuje poistné plnenia druhého zaist'ovateľa.

Navyše obrázok 15, znázorňujúci jednotlivé vrstvy krytia, umožňuje rozdelenie konkrétnej výšky škody medzi prvopoist'ovateľa a zaist'ovateľov. Pritom

plošný obsah jednotlivých vrstiev na obrázku 15 je zhodný s korešpondujúcimi plošnými obsahmi približujúcimi poistné plnenia graficky znázornené na obrázkoch 12, 13, 14.

3. Optimalizácia reťazcov zaist'ovacích ochrán

V predchádzajúcich častiach sme sa venovali popisu a analýze jednotlivých ochrán a poradiu ich skladaní. Aplikáciou rôznych ochrán na tie istá dáta získavame rozdielne výsledky. Zaistiť sa, ktorá ochrana je v jednotlivých prípadoch optimálna, však môžeme, ak zvolíme matematickú cestu – použitím jedného z optimalizačných kritérií. Je to kritérium *stredná hodnota, rozptyl*, ktoré sa zaoberá maximalizáciou očakávaného zisku pri podmienke fixného rozptylu. Jeho ekvivalenciou je minimalizácia rozptylu pri fixnom zisku. Teda chceme minimalizovať náklady na ponechané riziko, riziko, ktoré bude niest' poist'ovňa po realizácii celkového zaist'ovacieho programu. Celkové náklady môžu byť definované ako cena, ktorá má byť zaplatená za očakávané riziko cedované na zaist'ovateľa a fixný násobok strednej kvadratickej odchýlky ponechaného rizika. Predpokladáme, že náklady na zaistenie sú proporčné s očakávaným rizikom cedovaným na zaist'ovňu, čo korešponduje s princípom výpočtu zaistného.

Prenos rizika z prvopoist'ovateľa na zaist'ovňu, resp. zaist'ovne vychádza z predpokladu, že prijaté poistné by malo byť vyššie ako očakávaná celková škoda prvopoist'ovateľa a náklady na zaistenie. Vyjadríme teda riziko, ktoré si ponecháva prvopoist'ovateľ po aplikácii zaistenia, resp. po aplikácii reťazca ochrán. Vymedzíme aj cedované riziko a vyjadríme jeho náklady na zaistenie. Zostrojíme funkciu F rovnajúcu sa očakávanému zisku, vo všeobecnosti funkciu n -premenných. Pomocou Lagrangeovej funkcie vypočítame extrém tejto funkcie.

Priblížime optimalizáciu zaist'ovacích postupov na zložení dvoch proporcionálnych ochrán, a to *kvótovom* a *excedentnom* zaistení vzhľadom na poistnú sumu, pričom budeme pracovať s kolektívnym modelom rizika a vychádzať z grafickej prezentácie skladania týchto ochrán a odvodených korešpondujúcich vzťahov v predchádzajúcej časti. Riziko, ktoré si ponecháva prvopoist'ovateľ v súlade s označením v kolektívnom modeli rizika, pri aplikácii reťazca *kvóta, surplus* vzhľadom na vzťah (16) označme

$${}^P R(q, \alpha) = q \sum_{i=1}^N ({}^P X_{\alpha})_i = \sum_{i=1}^N (q \cdot {}^P X_{\alpha})_i = \sum_{i=1}^N ((q \cdot {}^P X)_{q\alpha})_i \quad (22)$$

To, že poradie použitia jednotlivých ochrán neovplyvňuje očakávanú škodu prvopoist'ovateľa, ale že poradie skladaných ochrán nie je zanedbateľné, dokážeme analyzovaním kvótového a excedentného zaistenia vzhľadom na poistnú sumu v oboch poradiach.

3.1. Aplikácia excedentného zaistenia po kvótovom zaistení

Očakávaná škoda z daného portfólia pri aplikácii excedentného zaistenia po kvótovom zaistení je na základe (2)

$$E\left({}^P R(q, \alpha)\right) = E(N) \cdot q \cdot E({}^P X_\alpha) \quad (23)$$

Disperziu možno upraviť podľa (3) na tvar

$$D\left({}^P R(q, \alpha)\right) = q^2 E(N) \cdot \left(E({}^P X_\alpha^2) + A E^2({}^P X_\alpha)\right), \text{ kde } A = \frac{D(N) - E(N)}{E(N)} \quad (24)$$

Celkové náklady na zaistenie vyjadríme ako očakávanú škodu, ktorú má kryť zaistovateľ pri aplikácii kvótového zaistenia, upravenú o parameter ochrany

$$E\left({}^Z_1 R(q)\right)(1 + \Theta_q) = (1 - q) \cdot E(N) \cdot E(X) \cdot (1 + \Theta_q) \quad (25)$$

a pri aplikácii excedentného zaistenia po kvótovom zaistení

$$E\left({}^Z_2 R(q, \alpha)\right)(1 + \Theta_E) = q \cdot E(N) \cdot (E(X) - E({}^P X_\alpha)) \cdot (1 + \Theta_E) \quad (26)$$

Náklady na zaistenie sú ovplyvnené parametrami ochrany, rizikovými prirážkami na zaistenie Θ_q a Θ_E . Ich relevantné hodnoty sú $\Theta_q \in (0,1; 0,15)$, resp. $\Theta_E \in (0,125; 0,2)$. Aby poisťovňa nemusela znášať prebytočné riziko pri použití týchto dvoch ochrán, a súčasne aby necedovala riziko, ktoré by bola schopná sama úspešne kryť, je potrebné nájsť optimálne hodnoty vlastného vrubu α a kvóty q . Pri určení optimálnych hodnôt kvóty a vlastného vrubu vychádzame z kritéria maximálneho zisku s väzbou na rozptyl. Teda ak označíme prijaté poistné PP , očakávaný zisk vyjadríme vzťahom

$$\begin{aligned} E(Z) = PP - E({}^P R(q, \alpha)) - (1 - q) \cdot E(N) \cdot E(X) \cdot (1 + \Theta_q) - \\ - q \cdot E(N) \cdot (E(X) - E({}^P X_\alpha)) \cdot (1 + \Theta_E) \end{aligned} \quad (27)$$

Zostrojíme Lagrangeovu funkciu s väzbou na disperziu $D({}^P R(q, \alpha))$. Tá má tvar

$$\begin{aligned} F(q, \alpha) = PP - E({}^P R(q, \alpha)) - (1 - q) \cdot E(N) \cdot E(X) \cdot (1 + \Theta_q) - \\ - q \cdot E(N) \cdot (E(X) - E({}^P X_\alpha)) \cdot (1 + \Theta_E) - \beta \cdot \\ \left[q^2 E(N) \cdot \left(E({}^P X_\alpha^2) + A E^2({}^P X_\alpha) \right) - C^2 \right], \quad \beta \geq 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Parciálnym derivovaním funkcie definovanej vzťahom (28) podľa q a α získame spolu s väzbou systém rovníc, ktorého riešením získame okrem iného nasledujúce poznatky.

Hodnota vlastného vrubu je nezávislá od kvóty q , a ak z jeho hodnoty vyplýva, že $q \leq 1$, tak ten je nezávislý aj od rozptylu. Najväčšie ovplyvnenie hodnoty

α spôsobuje pomer prirážok $Q = \frac{\Theta_E - \Theta_q}{\Theta_E} \in (0; 1)$. Rozptyl náhodnej premennej, ktorá popisuje ponechané riziko cedenta, je

$$D({}^P R(q, \alpha)) = x^2 D(S) \quad (29)$$

z toho

$$q^2 \cdot (E({}^P X_\alpha^2) + A E^2({}^P X_\alpha)) = x^2 \cdot (E(X^2) + A \cdot E^2(X)), x \in \langle 0; 1 \rangle, q \in \langle 0; 1 \rangle \quad (30)$$

Pre $q = 1$ je rovnica riešená iba vzhľadom na α

$$(E({}^P X_\alpha^2) + A E^2({}^P X_\alpha)) = x^2 \cdot (E(X^2) + A \cdot E^2(X)) \quad (31)$$

Táto rovnica nemusí mať vždy jednoznačné riešenie. Ak však budeme predpokladať, že napríklad $A \in \langle -1; 0 \rangle$, rovnice (30) a (31) budú mať jednoznačné riešenie pre α . Zo všeobecného riešenia rovníc vyplýva, že množina všetkých možných riešení pre α spĺňa podmienku

$$E({}^P X_\alpha) > Q \cdot E(X) \quad (32)$$

Teda pre určenie jednoznačného riešenia q a α :

- riešime systém rovníc pre α , kde
- $\{\alpha > \alpha'; \quad \alpha' \text{ je riešením rovnice } E({}^P X_\alpha) - Q \cdot E(X) = 0\};$
- skontrolujeme rovnicu (30), či korešpondujúca hodnota $q \leq 1$; ak áno, zostáva α a q z rovnice (31) ako optimálna kombinácia riešení;
- v opačnom prípade riešime rovnicu (31) pre α a ponecháme hodnotu vlastného vrubu α s kvótou $q = 1$ ako optimálne riešenie.

3.2. Aplikácia kvótové zaistenia po excedentnom zaistení

Očakávaná škoda z daného portfólia pri aplikácii kvótového a následne excedentného zaistenia je opäť (pozri vzťah (25))

$$E({}^P R(\alpha, q)) = E(N) \cdot q \cdot E({}^P X_\alpha) \quad (33)$$

teda nie je ovplyvnená poradím použitých uvažovaných ochrán.

Na určenie optimálnej kombinácie kvóty a vlastného vrubu hľadáme v tomto prípade extrém Lagrangeovej funkcie s väzbou na rozptyl $D({}^P R(\alpha, q))$, ktorá má tvar

$$\begin{aligned} F(q, \alpha) = & PP - E({}^P R(\alpha, q)) - q \cdot E(N) \cdot (E(X) - E({}^P X_\alpha)) \cdot (1 + \Theta_E) - \\ & - E(N) \cdot (1 - q) \cdot E({}^P X_\alpha) \cdot (1 + \Theta_q) - \\ & - \beta \cdot \left[q^2 E(N) \cdot (E({}^P X_\alpha^2) + AE^2({}^P X_\alpha)) - C^2 \right], \quad \beta \geq 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Za predpokladu, že $E(X_\alpha^2) \geq E^2(X_\alpha)$, nájdeme optimálne riešenie tak, že riešime systém lineárnych rovníc vzhľadom na α , zistíme, či korešpondujúca hodnota kvóty je menšia ako jedna. Ak áno, táto hodnota spolu s vlastným vrubom α ostane hľadaným riešením. V opačnom prípade je vhodná iba ochrana surplusu s kvótou $q = 1$. V oboch prípadoch pri nízkej hodnote q kvótové zaistenie nie je potrebné.

Možno konštatovať, že optimálne riešenie je v tomto prípade ovplyvnené najmä faktorom $Q = \frac{\Theta_E - \Theta_q}{\Theta_q}$, $\Theta_q < \Theta_E$, teda optimálne riešenie závisí od štruktúry nákladov na zaistovacie ochrany, ktoré sú odlišné pre jednotlivé typy ochrán.

Záver

Zaistenie je dôležitým nástrojom na vykazovanie solventnosti poisťovne. Pri proporcionálnom zaistení sú parametre cesie vopred určené rozdelením poistnej sumy. Pri neproporcionálnom zaistení je rozhodujúca až výška vzniknutej škody. Na rozdiel od proporcionálneho zaistenia, keď sa prvopoisťovateľ a zaistovateľ podieľajú vopred stanoveným podielom na vzniknutej škode, pri neproporcionálnom zaistení sa zaistovateľ podieľa na poistnom plnení iba vtedy, ak škoda presiahne vlastný vrub prvopoisťovateľa, a to prevažne iba do dojednaného limitu zaistovateľa. Z možných variácií jednotlivých ochrán, z možných zmysluplných reťazcov základných druhov zaistenia je dôležité zvoliť optimálnu skladbu, stanoviť optimálny reťazec. To, či v praxi používané skladby sú tými optimálnymi pre dané portfólio poistných zmlúv, môže potvrdiť výsledok maximalizácie funkcie celkových ziskov. Na jej stanovenie vypočítame potrebné charakteristiky celkovej škody prvopoisťovateľa, ako aj jednotlivých zaistovateľov. Charakteristiky získame na základe odvodených vzťahov, s dôrazom na poradie skladania a s využitím aparátu kolektívneho modelu rizika. To, že poradie zaistovacích reťazcov je dôležité, dokazuje aj grafická prezentácia.

Metódu aplikovanú pri hľadaní optimálneho reťazca dvoch proporcionálnych ochrán *quota share* a *surplus* zaistenia možno analogicky použiť na efektívne skladanie ďalších rôznych reťazcov základných ochrán. Tým je možné pre konkrétne portfóliá poistných zmlúv, resp. jednotlivé netriviálne riziká stanoviť taký zaistovací program, ktorý prispeje k profitu poisťovne. Pomôže ušetriť finančné prostriedky vynaložené na zaistenie stanovením hranice medzi rizikami, ktoré je poisťovňa schopná kryť sama a ktoré skutočne treba do zaistenia postúpiť.

Literatúra

- [1] CIPRA, T.: Pojistná matematika. Praha: Ekopress 1999.
- [2] BÜHLMANN, H.: Mathematical Methods in Risk Theory. München: Springer 1996.
- [3] BEIRLANT, J.: Reinsurance Programs. Brussels: Aon Re Belgium 2002.
- [4] GOOVAERTS, M. J. – KAAS, R.: Ordering of Actuarial Risks, Caire Education Series 1. Amsterdam: University of Amsterdam 1994.
- [5] HORÁKOVÁ, G. – HUŤKA, V.: Teória pravdepodobnosti 1. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM 2002.
- [6] HORÁKOVÁ, G. – MUCHA, V.: Odhad očakávanej výšky poistného plnenia pri poistení na plnú hodnotu v kombinácii s excedentnou a integrálnou spoluúčasťou. In: FINRISK 2003. [International Scientific Conference on the Occasion of the 50-th Anniversary of Foundation of the University Žilina.] Tatranská Štrba 2003.
- [7] HORÁKOVÁ, G. – MUCHA, V.: Kombinovanie kvótového a excedentného zaistenia vzhľadom k poistnej sume. In: Poistná matematika v teórii a praxi. [Zborník príspevkov 4. vedeckého seminára.] Bratislava: Ekonomická univerzita v Bratislave, FHI a SSA december 2003.
- [8] KOZUBÍK, A.: Extreme Value Theory in Risk Management. In: Veda a krízové situácie. [Medzinárodná konferencia mladých vedeckých pracovníkov.] Žilina: Žilinská Univerzita v Žiline, Fakulta špeciálneho inžinierstva november 2004. Zborník je na CD.
- [9] PACÁKOVÁ, V.: Aplikovaná poistná štatistika. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM 1998.
- [10] CIPRA, T.: Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví. Praha: Grada 2004.
- [11] HARUMOVÁ, A.: Ohodnotenie pohľadávok pri cessi. Ekonomický časopis/Journal of Economics, 51, 2003, č. 9, s. 1158 – 1173.
- [12] ČEPELOVÁ, A. – POLOUČEK, S.: Aplikácia strategických metód na hodnotenie portfólia bankových produktov. Ekonomický časopis/Journal of Economics, 51, 2003, č. 6, s. 688 – 707.