JOZEF KRCHO

OSLNENIE RELIÉFU V ĽUBOVOĽNOM UHLE A ČASE A JEHO ZNÁZORNENIE DO MÁP POMOCOU IZALUMKLÍN

L'auteur s'occupe de la question de l'éclairement solaire du relief sous un angle quelconque en un temps quelconque ainsi que de la dynamique de cet éclairement. Définissant les isoclines comme des isolignes reliant les points du relief recevant la lumière solaire sous le même angle en un moment choisi arbitrairement il résout le problème à l'aide du calcul vectoriel. L'auteur propose ensuite un mode de détermination de la variation de l'angle d'incidence de la lumière solaire sur le relief en fonction du temps à l'aide d'isalumclines construites pour des intervalles de temps égaux et assez petits. Ces isalumclines pourront servir de base pour la détermination de la durée potentielle de l'éclairement des différentes parties du relief pour différents intervalles de temps. A la fin de l'ouvrage l'auteur donne des équations paramétriques établissant les critériums auxquels doit satisfaire le vecteur de la normale au relief pour que son point initial appartienne à l'isalumcline.

Množstvo dopadajúcej slnečnej energie na zemský povrch závisí od uhla prechádzajúceho slnečného lúča zemskou atmosférou, od uhla oslnenia zemského povrchu, od dĺžky oslnenia a radu ďalších fyzikálnych podmienok. Nás budú zaujímať prvé tri geometrické faktory: 1. uhol prechodu slnečného lúča zemskou atmosférou v skúmanej oblasti závisiaci od času (od dennej ročnej doby) a od zemepisnej šírky, 2. uhol oslnenia reliéfu, 3. dĺžka oslnenia reliéfu v hodinách súčasne s dobou, t. j. bližším časovým vymedzením dĺžky oslnenia (dopoludnie, poludnie, odpoludnie atď. a stanovením optima oslnenia). Časový a uhlový priebeh oslnenia možno skúmať pre jeden deň alebo pre dlhšie časové obdobie, napr. vegetačné. Bližšie sa budeme zaoberať problémom, ako zachytiť do mapy veľkej mierky dynamiku oslnenia reliéfu v uhle a v čase, pričom v príspevku budeme venovať hlavnú pozornosť odvodeniu pojmu izočiar jednakého uhla oslnenia na reliéfe.

Logická podstata v príspevku riešeného problému spočíva v tom, že na báze izoklín pri zachovaní všetkých podmienok o vlastnostiach reliéfu ako spojitej plochy [1, 6, 7, 11] je možné pre ľubovoľný časový moment určiť izočiary rovnakého uhla oslnenia na reliéfe, izalumklíny, ktoré definujeme ako izolínie spájajúce množinu bodov na reliéfe o konštantnom uhle oslnenia v danom časovom momente. Na základe takto definovaných izalumklín, zostrojených pre ľubovoľne zvolený počet časových intervalov v určitom dni dá sa potom zistiť možná časová dĺžka oslnenia zvoleného miesta na reliéfe a súčasne uhlová zmena oslnenia v tomto čase. Ináč povedané, izalumklínami konštruovanými po rovnakých dostatočne hustých časových intervaloch je možné určiť priebeh uhlových hodnôt oslnenia reliéfu v čase a na ich základe je potom možné súčasne určiť potencionálnu dĺžku oslnenia jednotlivých častí reliéfu. Ako dôsledok z toho bude vyplývať možnosť vymedzenia jednotlivých častí reliéfu oslnených v rovnakej časovej dĺžke v tej istej časti dňa a zároveň v rôznych častiach dňa. Čiary spájajúce miesta oslnené v rovnakej časovej dĺžke definujeme potom ako izalumchróny [6]. V tomto príspevku bude podrobnejšie riešená myšlienková podstata izalumklín pre jeden deň.

Problematiku možno matematicky riešiť viacerými spôsobmi a v rôznych súradnicových sústavách. V príspevku sa bude problém pre priestorovú názornosť riešiť metódami analytickej priestorovej geometrie a vektorovej algebry, lebo pomocou použitia vektorovej algebry sa dajú stručne odvodiť základné vzťahy medzi uhlom oslnenia, ktorý označíme δ_{exp} a reliéfom, v zmysle priestorovej polohy δ_{exp} vzhľadom k reliéfu a jej časovej zmeny, vzťahy medzi uhlom oslnenia δ_{exp} v priestore a jeho obrazom v mape, ktorý označíme ako ω, vzťahy medzi uhlom δ_{exp} a uhlom δ_{LN}, zovretým vektorom normály N k reliéfu so slnečným lúčom L a nakoniec vzťah uhla δ_{LN} a δ_{exp} k izalumklínam. Pre určenie týchto a iných základných vzťahov budú v príspevku odvodené všetky potrebné prvky.

Aby bolo možné problém riešiť, potrebujeme predovšetkým poznať súradnice Slnka pre zvolené časové momenty po určitých zvolených dňoch v horizontálnej sférickej (astronomickej) sústave. V príspevku budeme predpokladať, že horizonatálne súradnice Slnka $A\odot$, $h\odot$, kde $A\odot$ je azimut Slnka a $h\odot$ je výška Slnka nad obzorom H vo zvolenom časovom okamihu, poznáme vzhľadom na to, že problém riešenia výpočtu súradníc Slnka svojou vnútornou podstatou je rozdielny od riešeného problému v príspevku.

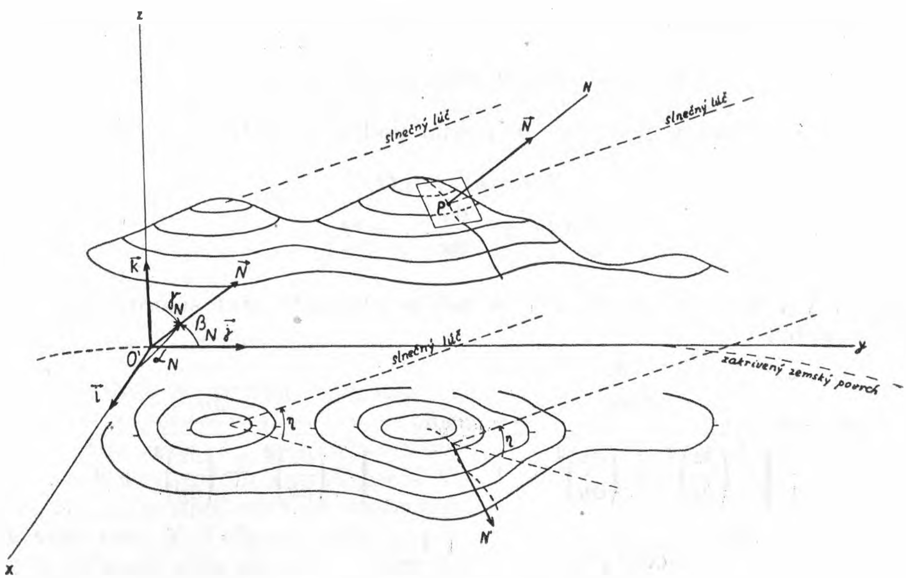
Problém izalumklín budeme riešiť v priestorových kartézskych súradniciach x, y, z tak, že v priestore v ľubovoľnom bode P skúmanej časti reliéfu zavedieme pravouhlú kartézsku sústavu $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$, v ktorej vektor $\boldsymbol{i}$ bude smerovať k juhu paralelne s rovinou horizontu, vektor $\boldsymbol{k}$ k zenitu a a počiatok sústavy $O \equiv P$. V tejto sústave budeme súčasne uvažovať guľovú plochu s polomerom $r = 1$ ako pomocnú veličinu, ktorej stred S bude totožný s počiatkom 0 pravouhlej kartézskej sústavy $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$, takže $S \equiv O$ a teda S (0, 0, 0). Pre túto guľovú plochu zrejme platí, že ju tvorí množina koncových bodov jednotkových vektorov vychádzajúcich z počiatku O sústavy $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$, čo bude mať tú výhodu, že súradnice x, y, z koncových bodov jednotkových vektorov budú zároveň ich smerovými kosínusmi. Za smerové kosínusy jednotkového vektora považujeme kosínusy uhlov zovretých jednotkovými vektormi $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ s týmto vektorom.[1] Aby sme mohli nejaký bod na jednotkovej guľovej ploche nebeskej sféry vyjadrený sférickými súradnicami horizontálnej sférickej sústavy uvažovať zároveň pomocou súradníc x, y, z v pravouhlej kartézskej sústavy $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$, stotožnime stred S' sférickej horizontálnej sústavy so stredom S uvažovanej jednotkovej guľovej plochy, takže pre stred S bude potom platiť, že $S \equiv S'$ (0, 0, 0) a rovina horizontu H bude totožná so súradnicovou rovinou $(\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{j})$. Zároveň zorientujeme guľovú plochu sférickej horizontálnej súradnicovej sústavy v smere horizontálnom tak, aby jej rovina meridiánu (miestneho poludníka) bola totožná so súradnicovou rovinou $(\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{k})$ sústavy $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$ a rovina prvého vertikálu bola totožná so súradni-

[1] J. Klapka, *Analytická geometrie.* Praha 1960.
B. Bydžovský, *Úvod do analytickej geometrie.* Praha 1956.

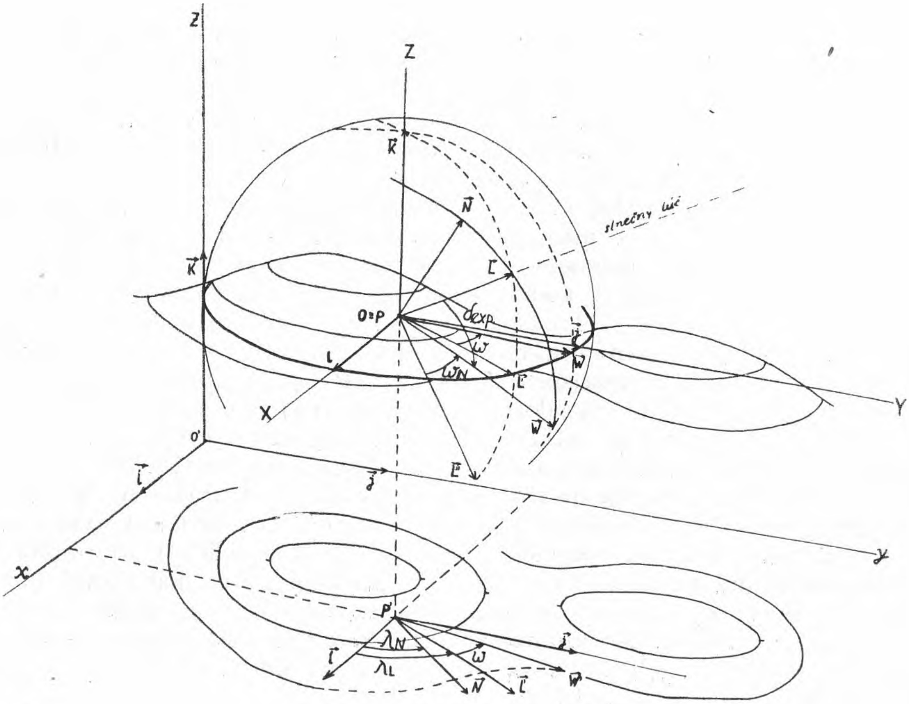
covou rovinou $(j\ k)$. Po takejto úprave ktorýkoľvek bod na nebeskej sfére môžeme vyjadriť buď pomocou súradníc A, h sférickej horizontálnej sústavy, alebo pomocou súradníc x, y, z pravouhlej kartézskej sústavy $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$. Keďže nebeskú sféru považujeme za jednotkovú guľovú plochu, ktorýkoľvek bod na nej môžeme súčasne považovať za koncový bod jednotkového vektora s počiatočným bodom v strede $S' \equiv S$ a súradnice x, y, z bodu na guľovej ploche nebeskej sféry budú zároveň smerovými kosínusmi tohto jednotkového vektora. Týmto spôsobom môžeme vyjadriť aj polohu Slnka na nebeskej sfére buď pomocou jeho horizontálnych súradníc $A_{\odot}$, $h_{\odot}$, horizontálnej sférickej sústavy, alebo pomocou súradníc x, y, z sústavy $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$.

Pre veľkosť a vlastnosti skúmaného územia nech platia predpoklady vyslovené v [6, 7, 11]. Skúmanú časť reliéfu budeme uvažovať vzhľadom na pravouhlú kartézsku súradnicovú sústavu $\langle O', \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$, pričom rovinu (xy) považujeme v zmysle [6, 7, 11] za základňu reliéfu (obr. 1). Skúmaný bod $P\ (x, y, z)$ na reliéfe bude zároveň počiatkom O súradnicovej sústavy $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$. Keďže uhol oslnenia pre rovinu (xy) ako základnice skúmanej časti reliéfu v danom časovom momente môžeme na základe podmienok a,—d, vyslovených v [6, 7] o reliéfe, považovať za konštantný, t. j. vplyv zakrivenia geoidu v uvažovanej časti zemského povrchu bude nulový, skúmaný bod na reliéfe v ktoromkoľvek vymedzenom mieste môže byť zároveň počiatkom priest. kartézskej súradničnej sústavy $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$, pričom platnosť odvodených vzťahov zostane zachovaná pre celú uvažovanú časť reliéfu. Odvodené vzťahy budú vyjadrené pomocou súradníc vektorov, ktoré sú rovnaké vzhľadom na obe súr. sústavy $\langle O', \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ a $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ (obr. 2).

Nech je spojitá plocha, ktorou nahradíme reliéf v zmysle predpokladov



Obr. 1.



Obr. 2.

a) —d) vyslovených v [6, 7], daná vzhľadom na kartézsku súr. sústavu $\langle O', \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$ predpisom

$$F\ (x, y, z) = O, \text{ resp. } z = F\ (x, y). \tag{1}$$

Jej spádová krivka v priestore je potom podľa 6, 7 daná sústavou rovníc

$$\begin{aligned} F\ (x, y, z) &= O, \\ \Phi\ \left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) &= O. \end{aligned} \tag{2}$$

Normála N v bode P plochy (1) na krivke (2) bude mať smerové kosínusy dané prepisom

$$\cos\alpha_N = \frac{-\dfrac{\delta z}{\delta z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\delta z}{\delta x}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta z}{\delta y}\right)^2 + 1}}; \quad \cos\beta_N = \frac{-\dfrac{\delta x}{\delta y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\delta z}{\delta x}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta z}{\delta y}\right)^2 + 1}};$$

$$\cos\gamma_N = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\delta z}{\delta x}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta z}{\delta y}\right)^2 + 1}} \tag{3}$$

a dotyková rovina σ_N k ploche (1) v bode $P(x, y, z)$ bude vyjadrená rovnicou

$$Z - z = (X - x)\frac{\delta z}{\delta x} + (Y - y)\frac{\delta z}{\delta y}, \tag{4}$$

kde x, y, z sú súradnice bodu P plochy (1) vzhľadom na súradnicovú sústavu $\langle O', \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ a X, Y, Z súradnice ľubovoľného bodu dotykovej roviny σ_N k ploche (1) v tej istej súradnicovej sústave.

Rovnicu spojitej plochy, ktorou nahradíme reliéf, možno udať iba vo všeobecnom tvare (1), avšak súradnice skúmaných bodov plochy (1) v súr. sústave $\langle O', \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ možno jednoznačne zistiť odmeraním z mapy veľkej mierky, a tak isto možno metricky zistiť i smerové kosínusy (3) normály N plochy (1) v každom bode.

Preto v ďalších úvahách budeme bod P považovať za počiatok súr. sústavy $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ a súčasne za stred jednotkovej guľovej plochy $(P \equiv O \equiv S)$, takže vektor $\boldsymbol{N}$ považovaný za jednotkový vektor normály plochy bude vychádzať z počiatku a dotyková rovina (4) k ploche (1) v bode P bude prechádzať počiatkom súr. sústavy $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$. Všetky nasledujúce operácie budeme prevádzať v súradnicovej sústave $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$, preto ďalej súradnice uvažovaných bodov vzhľadom na $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ budeme označovať malými písmenami x, y, z.

Rovnicu (4) môžeme potom nahradiť vektorovou rovnicou roviny prechádzajúcej počiatkom O

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r} = 0, \tag{5}$$

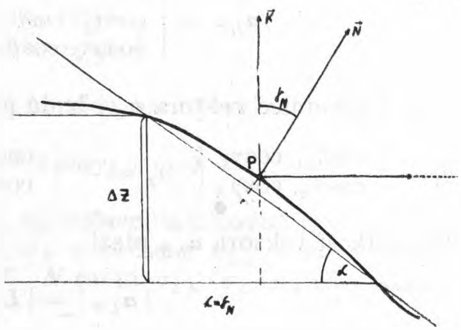
kde $\boldsymbol{N}$ je vektor normály dotykovej roviny σ_N a $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor ľubovoľného bodu tejto roviny. Predpokladajme, že vektor normály $\boldsymbol{N}$ je jednotkový vektor, t. j. $|\boldsymbol{N}| = 1$, potom jeho kartézske súradnice $\boldsymbol{N} = \{N_x, N_y, N_z\}$ budú zároveň jeho smerovými kosínusmi, ktoré označíme $\cos\alpha_N$, $\cos\beta_N$, $\cos\gamma_N$, takže $\boldsymbol{N} = \{\cos\alpha_N, \cos\beta_N, \cos\gamma_N\}$. Rovnica roviny (5) bude v normálovom tvare znieť

$$x \cos\alpha_N + y \cos\beta_N + z \cos\gamma_N = 0, \tag{6}$$

kde koeficienty pri neznámych x, y, z sú zároveň smerové kosínusy normály N, pre ktoré platí vzťah

$$\cos^2\alpha_N + \cos^2\beta_N + \cos^2\gamma_N = 1. \tag{6'}$$

Smer vektora $\boldsymbol{N}$ zistíme meraním z mapy veľkej mierky pomocou uhlov λ_N, γ_N, kde uhol λ_N je horizontálny uhol zovretý vektorom $\boldsymbol{i}$ s vektorom N' (obr. 2) a γ_N je uhol zovretý vektorom $\boldsymbol{k}$ s vektorom $\boldsymbol{N}$. Veľkosť uhla γ_N sa rovná veľkosti uhla sklonu v bode P (obr. 2a).



Obr. 2a.

Pre transformáciu kartézskych súradníc do polárnych platia pre jednotkové vektory vzťahy

$$\begin{aligned} x &= \cos\alpha = \sin\gamma \cos\lambda \\ y &= \cos\beta = \sin\gamma \sin\lambda \\ z &= \cos\gamma = \cos\gamma, \end{aligned} \tag{7}$$

ktorými možno teda vyjadriť aj smerové kosínusy jednotkového vektora N pomocou horizontálneho uhla λ_N a vertikálneho uhla γ_N.

Dopadajúci slnečný lúč L do bodu P, čiže do stredu jednotkovej guľovej plochy, považujme za nositeľa jednotkového vektora $\boldsymbol{L}$. Súradnice (smerové kosínusy) vektora $\boldsymbol{L}$ vzhľadom na $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ označme $\cos\alpha_L$, $\cos\beta_L$, $\cos\gamma_L$. Rovina σ_L kolmá na tento lúč a prechádzajúca zároveň stredom jednotkovej guľovej plochy, bude daná normálovou rovnicou

$$x \cos\alpha_L + y \cos\beta_L + z \cos\gamma_L = 0. \tag{8}$$

Pre vektor $\boldsymbol{L} \not\equiv \boldsymbol{N}$ sa roviny σ_N a σ_L pretínajú v priamke $-a-$ dôležitej pre ďalšie úvahy. Priamka $-a-$ ako priesečnica rovín σ_L a σ_N je určená sústavou rovníc

$$\begin{aligned} x \cos\alpha_L + y \cos\beta_L + z \cos\gamma_L &= 0 \\ x \cos\alpha_N + y \cos\beta_N + z \cos\gamma_N &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

ktorej matica

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_L, & \cos\beta_L, & \cos\gamma_L \\ \cos\alpha_N, & \cos\beta_N, & \cos\gamma_N \end{pmatrix}$$

má pre $\boldsymbol{N} \not\equiv \boldsymbol{L}$ hodnosť $h = 2$, iba pre $\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{N}$ má hodnosť $h = 1$.
Priamka $-a-$ bude zároveň nositeľkou vektora $\boldsymbol{a}_{LN}$, pričom vektor $\boldsymbol{a}_{LN}$ bude vektorom normály pre ďalšie úvahy veľmi dôležitej roviny σ_{LN}, v ktorej ležia vektory $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{N}$ (obr. 3). Vektor $\boldsymbol{a}_{LN}$ ako vektor normály k rovine σ_{LN} dostaneme pomocou vektorového súčinu jednotkových vektorov $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{N}$

$$\boldsymbol{a}_{LN} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{N}. \tag{10}$$

Tento súčin vyjadrený pomocou súradníc vektorov $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{N}$ bude

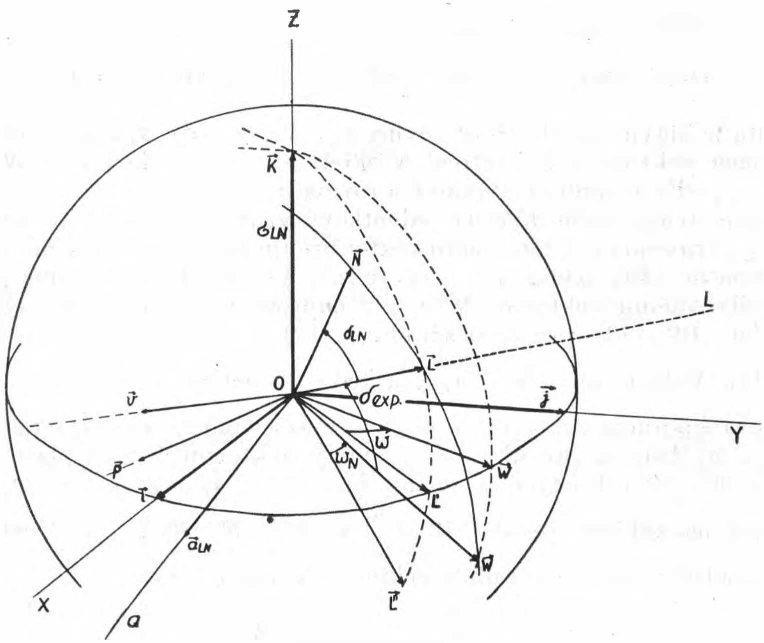
$$\boldsymbol{a}_{LN} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & , \boldsymbol{j} & , \boldsymbol{k} \\ \cos\alpha_L, & \cos\beta_L, & \cos\gamma_L \\ \cos\alpha_N, & \cos\beta_N, & \cos\gamma_N \end{vmatrix}, \tag{11}$$

odkiaľ súradnice vektora $\boldsymbol{a}_{LN}$ budú potom

$$a_1 = \begin{vmatrix} \cos\beta_L, & \cos\gamma_L \\ \cos\beta_N, & \cos\gamma_N \end{vmatrix}; \quad a_2 = - \begin{vmatrix} \cos\alpha_L, & \cos\gamma_L \\ \cos\alpha_N, & \cos\gamma_N \end{vmatrix}; \quad a_3 = \begin{vmatrix} \cos\alpha_L, & \cos\beta_L \\ \cos\alpha_N, & \cos\beta_N \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Pre veľkosť vektora $\boldsymbol{a}_{LN}$ platí

$$|\boldsymbol{a}_{LN}| = |\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{N}| = \sin\delta_{LN}, \tag{13}$$



Obr. 3.

a teda pre $\delta_{LN} \neq 90°$ je $|\boldsymbol{a}_{LN}| \neq 1$ a súradnice vektora $\boldsymbol{a}_{LN}$ nebudú jeho smerovými kosínusmi (obr. 3). Vektor $\boldsymbol{a}_{LN}$ bude jednotkový vektor pre uhol $\delta_{LN} = 90°$, lebo podľa vzťahu (13) $|\boldsymbol{a}_{LN}| = \sin\delta_{LN} = \sin 90° = 1$, ďalej $\boldsymbol{a}_{LN}$ bude nulový vektor, t. j. $|\boldsymbol{a}_{LN}| = 0$ pre $\delta_{LN} = 0°$, čiže pre $\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{N}$, keď $\sin 0° = 0$ a rovina $\delta_L \equiv \sigma_N$. Prípad, keď $|\boldsymbol{a}_{LN}| = 1$, však na reliéfe nastáva iba pre množinu bodov nachádzajúcu sa na rozhraní svetla a tieňa, keď vektor $\boldsymbol{L}$ leží v dotykovej rovine σ_N k ploche (1). Pre $\delta_{LN} = 0°$ bude bod P na reliéfe oslnený pod uhlom $\delta_{exp} = 90°$. V ďalších úvahách budeme predpokladať, že $\delta_{LN} \neq 0°$. Pre $\delta_{LN} \neq 0°$ smerové kosínusy vektora $\boldsymbol{a}_{LN}$ budú znieť

$$\cos\alpha_{LN} = \frac{1}{\sin\delta_{LN}} \begin{vmatrix} \cos\beta_L, & \cos\gamma_L \\ \cos\beta_N, & \cos\gamma_N \end{vmatrix}; \ \cos\beta_{LN} = -\frac{1}{\sin\delta_{LN}} \begin{vmatrix} \cos\alpha_L, & \cos\gamma_L \\ \cos\alpha_N, & \cos\gamma_N \end{vmatrix}$$

$$\cos\gamma_{LN} = \frac{1}{\sin\delta_{LN}} \begin{vmatrix} \cos\alpha_L, & \cos\beta_L \\ \cos\alpha_N, & \cos\beta_N \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Na ich základe môžeme napísať normálovú rovnicu roviny σ_{LN}

$$x \cos\alpha_{LN} + y \cos\beta_{LN} + z \cos\gamma_{LN} = 0 \tag{15}$$

Keďže vektor $\boldsymbol{a}_{LN}$ patrí do oboch rovín σ_L, σ_N súčasne a zároveň je vektorom normály roviny σ_{LN}, bude rovina $\sigma_{LN} \perp \sigma_N$ a súčasne $\sigma_{LN} \perp \sigma_L$, a preto smerové kosínusy vektorov normál $\boldsymbol{a}_{LN}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{N}$ rovín σ_{LN}, σ_L, σ_N sú viazané vzťahmi

$$\begin{aligned} \cos\alpha_L \cos\alpha_{LN} + \cos\beta_L \cos\beta_{LN} + \cos\gamma_L \cos\gamma_{LN} &= 0 \\ \cos\alpha_N \cos\alpha_{LN} + \cos\beta_N \cos\beta_{LN} + \cos\gamma_N \cos\gamma_{LN} &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Dôležitá je hlavne tá vlastnosť roviny σ_{LN}, že je vždy $\sigma_{LN} \perp \sigma_N$ pre ktorýkoľvek smer vektora $\boldsymbol{L}$ a vektora $\boldsymbol{N}$ okrem momentu, keď $\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{N}$, keď je vektor $\boldsymbol{a}_{LN}$ podľa vzťahu (13) nulový a rovina σ_{LN} je neurčitá.

Pre ďalšie úvahy bude dôležitý jednotkový vektor $\boldsymbol{W}$, ležiaci na priesečnici roviny σ_{LN} s rovinou σ_N, lebo tento vektor určuje svojou polohou na rovine σ_N spodné rameno uhla oslnenia δ_{exp} na reliéfe. Vektor $\boldsymbol{W}$ dostaneme pomocou vektorového súčinu vektorov $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{a}_{LN}$ v napísanom poradí. Pre vektor $\boldsymbol{a}_{LN}$ platí vzťah (10), (13), pre jeho súradnice (12) a pre jeho smerové kosínusy vzťah (14). Vektor $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{a}_{LN}$, a teda aj jednotkový vektor $\boldsymbol{W} = \dfrac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|}$ pri zachovaní poradia vektorov $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{a}_{LN}$ vo vektorovom súčine leží na priešečnici rovín σ_{LN}, σ_N tak, že pre uhol δ_{exp} zovretý vektormi $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{W}$ platí, že $0° < \delta_{exp} < 90°$. Z vektorového súčinu $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{a}_{LN}$ vyplýva, že $\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{a}_{LN}$ a na základe vzťahu $\boldsymbol{W} = \dfrac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|}$ aj $\boldsymbol{W} \perp \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{W} \perp \boldsymbol{a}_{LN}$. Vektor $\boldsymbol{w}$ je možné vyjadriť pomocou súradníc vektorov $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{a}_{LN}$ v tvare

$$\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & , \boldsymbol{j} & , \boldsymbol{k} \\ \cos\alpha_N, & \cos\beta_N, & \cos\gamma_N \\ a_1 & , a_2 & , a_3 \end{vmatrix} = \tag{17}$$

$$= (\cos\beta_N\, a_3 - \cos\gamma_N\, a_2)\, \boldsymbol{i} - (\cos\alpha_N\, a_3 - \cos\gamma_N\, a_1)\, \boldsymbol{j} + (\cos\alpha_N\, a_2 - \cos\beta_N\, a_1)\, \boldsymbol{k},$$

kde členy v zátvorkách označme podľa poradia zľava doprava w_1, w_2, w_3 takže môžeme písať $\boldsymbol{w} = w_1 \boldsymbol{i} - w_2 \boldsymbol{j} + w_3 \boldsymbol{k}$. Vektor $\boldsymbol{W}$ bude určený súradnicami $\boldsymbol{w} = \{w_1, -w_2, w_3\}$. Vektor $\boldsymbol{W}$ na základe vzťahu $\boldsymbol{W} = \dfrac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|}$ bude mať súradnice

$$\boldsymbol{W} = \left\{ \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}; -\frac{w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}; \frac{w_3}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}} \right\}, \tag{18}$$

ktoré budú zároveň aj jeho smerovými kosínusmi $\cos\alpha_W$, $\cos\beta_W$, $\cos_W$. Uhol oslnenia δ_{exp} leží v rovine σ_{LN} danej rovnicou (15), lebo táto rovina prechádza vektormi $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{N}$, pričom jej poloha sa pri konštantnom smere vektora $\boldsymbol{L}$ pre určitý zvolený časový moment závisle mení so zmenou polohy vektora normály $\boldsymbol{N}$ na reliéfe (1), avšak pri akejkoľvek zmene smeru vektora $\boldsymbol{N}$ plochy (1) bude vždy platiť, že $\sigma_{LN} \perp \sigma_N$, čo vyplýva z kolmosti $\boldsymbol{a}_{LN} \perp \boldsymbol{N}$ vektorov normál rovín σ_{LN} a σ_N. Veľkosť uhla oslnenia δ_{exp} v rovine σ_{LN} je rovná veľkosti uhla, ktorý zviera vektor $\boldsymbol{L}$ s vektorom $\boldsymbol{W}$, ktorého smerové kosínusy sú (18). Preto veľkosť uhla oslnenia δ_{exp} je možné vyjadriť pomocou skalárneho súčinu jednotkových vektorov $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{W}$ v tvare

$$\cos\delta_{exp} = \boldsymbol{L} \,.\, \boldsymbol{W} = \cos\alpha_L \cos\alpha_W + \cos\beta_L \cos\beta_W + \cos\gamma_L \cos\gamma_W, \tag{19}$$

pričom δ_{exp} je doplnok do 90° s uhlom δ_{LN} zovretým vektormi $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{N}$, takže o oboch uhloch platí vzťah

$$\delta_{exp} + \delta_{LN} = 90°. \tag{20}$$

Veľkosť uhla δ_{LN} je taktiež možné vyjadriť pomocou skalárneho súčinu vektora $\boldsymbol{L}$ s vektorom $\boldsymbol{N}$

$$\cos\delta_{LN} = \boldsymbol{L} \,.\, \boldsymbol{N} = \cos\alpha_L \cos\alpha_N + \cos\beta_L \cos\beta_N + \cos\gamma_L \cos\gamma_N. \tag{21}$$

Pretože o uhloch δ_{LN} a δ_{exp} platí vzťah (20), bude o druhých mocninách ich kosínusov platiť vzťah

$$\cos^2\delta_{exp} + \cos^2\delta_{LN} = 1. \tag{22}$$

Pre konštatný smer vektora $\boldsymbol{N}$ v bode P plochy (1) sa smerové kosínusy vektora $\boldsymbol{L}$ menia so zmenou času, takže v závislosti od zmeny smeru vektora $\boldsymbol{L}$ v čase, mení sa i veľkosť uhla δ_{LN} a tým v dôsledku vzťahu (20) mení sa i veľkosť uhla δ_{exp}. Keďže vzťah (20) pre akúkoľvek zmenu veľkosti uhla δ_{LN} v rozsahu intervalu (0°, 90°) zostáva zachovaný, na základe vzťahu (20) platí, že ak

$$\delta_{LN} \to 0° \text{ takže } \cos\delta_{LN} \to 1, \text{ potom } \delta_{exp} \to 90° \text{ a } \cos\delta_{exp} \to 0$$

a opačne, ak

$$\delta_{LN} \to 90° \text{ takže } \cos\delta_{LN} \to 0, \text{ potom } \delta_{exp} \to 0° \text{ a } \cos{}_{exp} \to 1.$$

Z toho zároveň vyplýva, že pre minimum hodnoty uhla δ_{LN} nastáva maximum pre hodnotu uhla δ_{exp}. Ak preložíme vektormi $\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{N}$ rovinu σ_{kN}, v ktorej tieto vektory ležia, potom vzhľadom na konštantné smerové kosínusy vektora $\boldsymbol{N}$ v bode P na reliéfe (1) a na premenné smerové kosínusy vektora $\boldsymbol{L}$ v čase, hodnota uhla δ_{exp} pre bod P dosiahne maximum v okamihu, keď vektor $\boldsymbol{L}$ bude ležať v rovine σ_{kN}. Rovina σ_{kN} je jednoznačne určená vektormi $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{N}$ len pre $\boldsymbol{N} \not\equiv \boldsymbol{k}$, kdežto pre $\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{k}$ je neurčitá. Pre prípad, keď $\boldsymbol{N} \not\equiv \boldsymbol{k}$, hodnota uhla δ_{exp} dosahuje maximum pri súčasnej minimálnej hodnote uhla δ_{LN} v okamihu, keď vektor $\boldsymbol{L}$ bude ležať v rovine meridiánu (miestneho poludníka).

Na priesečnici roviny σ_{kN} so súradnicovou rovinou (XY) zvoľme jednotkový vektor $\boldsymbol{N}'$ pre $\boldsymbol{N} \not\equiv \boldsymbol{k}$ tak, aby pre uhol $\delta_{NN'}$, zovretý vektormi $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{N}'$ platilo, že $\delta_{NN'} < 90°$. Takto zvolený jednotkový vektor $\boldsymbol{N}'$ určíme pomocou vektora $\boldsymbol{n}'$, pričom vektor $\boldsymbol{n}'$ zistíme z vektorových súčinov vektorov $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}'$ v napísanom poradí (obr. 4), takže pre jednotkový vektor $\boldsymbol{N}'$ bude platiť vzťah

$$\boldsymbol{N}' = \frac{\boldsymbol{n}'}{|\boldsymbol{n}'|} = \frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}|}. \tag{23}$$

Súradnice vektora $\boldsymbol{N}'$ určíme pomocou súradníc už uvedených vektorových súčinov vektorov $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v}$ v napísanom poradí. Vektor v leží v rovine (XY), vektor $\boldsymbol{n}'$ leží v rovine σ_{kN} a súčasne v rovine (XY). Vektor $\boldsymbol{v}$ je možné vyjadriť pomocou súradníc vektorov $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{k}$ v tvare

$$v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\alpha_N, & \cos\beta_N, & \cos\gamma_N \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\beta_N\, i - \cos\alpha_N\, j + 0\, k,$$

takže $v = \{\cos\beta_N;\ -\cos\alpha_N;\ 0\}$. Vektor n' bude potom daný vzťahom

$$n' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\beta_N, & -\cos\alpha_N, & 0 \end{vmatrix} = \cos\alpha_N\, i + \cos\beta_N\, j + 0\, k,$$

takže $n' = \{\cos\alpha_N;\ \cos\beta_N;\ 0\}$. Vektor N' ako jednotkový vektor bude vzhľadom na (23) daný vzťahom

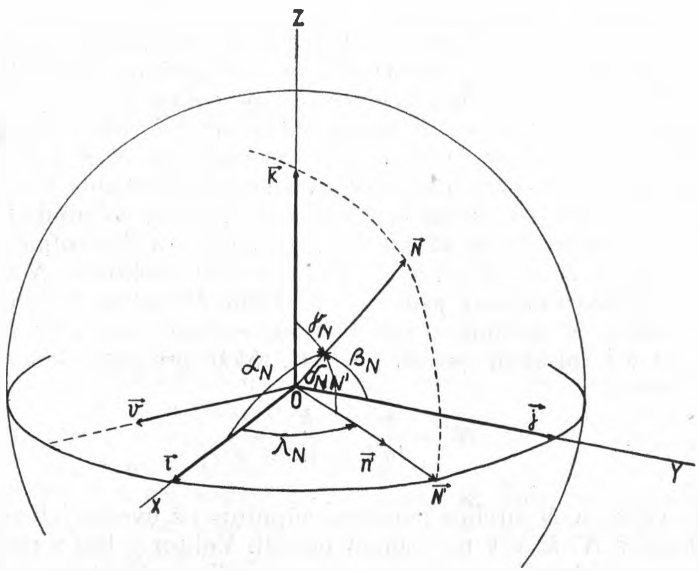
$$N' = \frac{n'}{|n'|} = \frac{\cos\alpha_N}{\sin\gamma_N}\, i + \frac{\cos\beta_N}{\sin\gamma_N}\, j + 0\, k.$$

Súradnice vektora N' sú zároveň aj jeho smerovými kosínusmi

$$N' = \left\{\frac{\cos\alpha_N}{\sin\gamma_N};\ \frac{\cos\beta_N}{\sin\gamma_N};\ 0\right\}, \tag{24}$$

o čom sa možno ľahko presvedčiť. Od orientácie vektora N je závislá aj orientácia vektora N' v rovine (XY) súr. sústavy $\langle O\, i\, j\, k\rangle$ (obr.4).

Pre maximálnu hodnotu uhla δ_{exp} bude $\sigma_{LN} \equiv \sigma_{kN} \equiv \sigma_{kL}$, kde σ_{kL} je rovina určená vektormi k a L. V priesečnici roviny σ_{kL} s rovinou (XY) leží jednotkový vektor L' tak, ze uhol $\delta_{LL'}$, zovretý vektormi L a L' je $0° < \delta_{LL'} < 90°$ a tvorí



Obr. 4.

s uhlom γ_L doplnok do 90°. Ako vyplýva z ďalších úvah, pre $\sigma_{LN} \equiv \sigma_{kN} \equiv \sigma_{kL}$ aj súradnice vektora L' budú totožné so súradnicami (24) vektora N', takže bude $N' \equiv L'$, alebo $L' = -N'$, t. j. vektory L' a N, budú protismerné (opačné orientované). Za smerové kosínusy vektorov N a L môžeme pri výpočte uhla δ_{LN} použiť vzťahy (7), podľa ktorých uhly λ_N, γ_N meriame z mapy pre vektor N, čo je zároveň v súhlase so vzťahom (24) vektora N' ležiaceho v rovine (XY) a pre vektor L ich buď dosadíme v pôvodnej forme, alebo transformujeme, čo bude v súlade so vzťahom o súradniciach vektora L'.

Pre úplnosť úvahy je ešte potrebné dokázať, že uhol oslnenia δ_{exp} neleží v zvislej rovine σ_{kL} preloženej vektorom k a vektorom L, takže uhol $\delta_{LL''}$ zovretý vektorom L a vektorom L'' ležiacom v priesečnici rovín σ_{kL} a σ_N nebude uhlom oslnenia reliéfu, teda $\delta_{LL''} \neq \delta_{exp}$. Z toho bude vyplývať, že ani poloha vektora L' ležiaceho v priesečnici roviny σ_{kL} s rovinou (XY) nám nevyznačuje v mape vzhľadom na vrstevnice polohu kolmého priemetu spodného ramena uhla oslnenia reliéfu.

Dôkaz vyplýva z toho, že rovina σ_{kL}, v ktorej leží uhol $\sigma_{LL''}$, neprechádza vektorom normály N dotykovej roviny σ_N k reliéfu (1) v bode P na krivke (2). Vektor N je jednak reprezentantom veľkosti spádu v bode P na krivke (2) plochy (1) vzhľadom na svoj smerový kosínus $\cos\gamma_N$, jednak jeho orientácia vzhľadom na smerové kosínusy $\cos\alpha_N$ $\cos\beta_N$ v konečnom zmysle charakterizuje priebeh reliéfu (čo do orientácie podľa svetových strán). Keďže smerové kosínusy vektora N sa na ploche (1) menia podľa jej priebehu, zatiaľ čo smer vektora L pre zvolený časový moment zostáva konštantný, nebude zvislá rovina σ_{kL} neprechádzajúca vektorom N meniť pri konštantnom smere vektora L svoju polohu, a preto nebude ani kolmá na rovinu σ_N, čiže $\sigma_{kL} \not\perp \sigma_N$, takže ani smer vektora L' v mape nám nebude charakterizovať vzhľadom na vrstevnice polohu kolmého priemetu spodného ramena uhla oslnenia do mapy. Kolmosť $\sigma_{kL} \perp \sigma_N$ nastane len vtedy, keď rovina σ_{kL} splynie s rovinou σ_{LN} a potom $\delta_{LL''} = \delta_{exp}$. V žiadnom inom prípade nie.

Určenie polohy vektora L' v rovine (XY) bude v ďalších úvahách užitočné aj pre stanovenie uhlovej odchýlky ω v mape medzi vektorom L' a kolmým priemetom vektora W do roviny (XY), vektorom $W' = \dfrac{w'}{|w'|}$, kde $|W'| = 1$, ktorý nám charakterizuje v mape polohu kolmého priemetu spodného ramena uhla oslnenia reliéfu vzhľadom na vrstevnice.

Vektor L' dostaneme pomocou vektorových súčinov vektorov L' k, p, pričom $L \not\equiv k$, postupne z vektorových súčinov $L \times k = p$ a $k \times p = l'$ pri zachovaní napísaného poradia vektorov vo vektorových súčinoch. Podmienka $L \not\equiv k$ v severných zemepisných šírkach zachovaná pre $\phi > 23°\ 30'$. Keďže vektor $k \perp p$ a zároveň $l' \perp k$, leží vektor $L' = \dfrac{l'}{|l'|}$ v rovine (XY).

Pre nejednotkový vektor p pri $\delta_{L_k} \neq 0°$ platí vzťah vyjadreného pomocou súradníc vo vektorovom súčine

$$p = L \times k = \begin{vmatrix} i & , & j & , & k \\ \cos\alpha_L, & & \cos\beta_L, & & \cos\gamma_L \\ 0 & , & 0 & , & 1 \end{vmatrix} = \cos\beta_L\, i - \cos\alpha_L\, j + 0\, k, \quad (25)$$

a teda jeho súradnice sú $\boldsymbol{p} = \{\cos\beta_L; -\cos\alpha_L; 0\}$. Súradnice vektora $\boldsymbol{l'} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{p}$ určíme zo vzťahu

$$\boldsymbol{l'} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{p} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & , & \boldsymbol{j} & , & \boldsymbol{k} \\ 0 & , & 0 & , & 1 \\ \cos\beta_L, & & -\cos\alpha_L, & & 0 \end{vmatrix} = \cos\alpha_L\, \boldsymbol{i} + \cos\beta_L\, \boldsymbol{j} + 0\, \boldsymbol{k}.$$

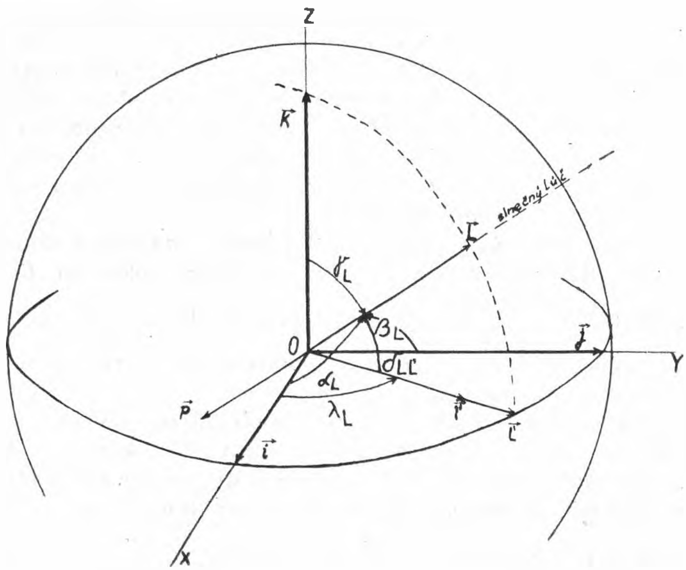
Hľadaný jednotkový vektor $\boldsymbol{L'}$ vyjadríme pomocou vektora $\boldsymbol{l'} = \{\cos\alpha_L; \cos\beta_L; 0\}$, podľa vzťahu

$$\boldsymbol{L'} = \frac{\boldsymbol{l'}}{|\boldsymbol{l'}|} = \frac{\cos\alpha_L}{\sin\gamma_L}\, \boldsymbol{i} + \frac{\cos\beta_L}{\sin\gamma_L}\, \boldsymbol{j} + 0\, \boldsymbol{k}. \tag{25'}$$

Jeho súradnice

$$\boldsymbol{L'} = \left\{ \frac{\cos\alpha_L}{\sin\gamma_L};\ \frac{\cos\beta_L}{\sin\gamma_L};\ 0 \right\} \tag{26}$$

sú zároveň aj jeho smerovými kosínusmi (obr. 5).



Obr. 5.

Zároveň určíme smerové kosínusy vektora $\boldsymbol{L''}$ ležiaceho na priesečnici roviny σ_{kL} s rovinou σ_N. Uhol, ktorý zviera vektor $\boldsymbol{L''}$ s vektorom $\boldsymbol{W}$ (18) v rovine σ_N, označme ω_N. Vzťah uhla ω_N k uhlu ω a δ_{exp} určíme postupne. Jednotkový vektor $\boldsymbol{L''}$ ležiaci v priesečnici rovín σ_{kL}', σ_N dostaneme vektorovým súčinom vektorov $\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}$ (25) a $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{l''}$ v napísanom poradí.

Podľa vzťahu (25) súradnice vektora $\boldsymbol{p}$ dosadíme do vzťahu vektorového súčinu pre vektor $\boldsymbol{l}''$ vyjadreného pomocou súradníc, takže

$$\boldsymbol{l}'' = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{p} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \\ \cos\alpha_N, & \cos\beta_N, & \cos\gamma_N \\ \cos\beta_L, & -\cos\alpha_L, & 0 \end{vmatrix} = l''_1\, \boldsymbol{i} + l''_2\, \boldsymbol{j} + l''_3\, \boldsymbol{k},$$

kde súradnice l''_1, l''_2, l''_3 vektora $\boldsymbol{l}''$ majú hodnoty $l''_1 = \cos\alpha_L \cos\gamma_N$, $l''_2 = \cos\beta_L \cos\gamma_N$, $l''_3 = -\cos\alpha_N \cos\alpha_L - \cos\beta_L \cos\beta_N$. Z vlastností vektorových súčinov vyplýva, že vektor $\boldsymbol{l}''$ leží súčasne v rovine σ_{kL} a σ_N. Podľa vzťahu $\boldsymbol{L}'' = \dfrac{\boldsymbol{l}''}{|\boldsymbol{l}''|}$ súradnice vektora $\boldsymbol{L}''$

$$\boldsymbol{L}'' = \left\{ \frac{l''_1}{\sqrt{l''^2_1 + l''^2_2 + l''^2_3}};\ \frac{l''_2}{\sqrt{l''^2_1 + l''^2_2 + l''^2_3}};\ \frac{l''_3}{\sqrt{l''^2_1 + l''^2_2 + l''^2_3}} \right\} \tag{27}$$

sú zároveň aj jeho smerovými kosínusmi.

Poloha vektora $\boldsymbol{W}'$ v rovine (XY) ležiaceho súčasne v rovine σ_{kW} preloženej vektormi $\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{W}$ takže $\sigma_{kW} \perp (XY)$ určuje polohu kolmého priemetu spodného ramena uhla oslnenia δ_{exp} do mapy a zároveň uhlovú odchýlku ω vektora $\boldsymbol{W}'$ od vektora $\boldsymbol{L}'$ v rovine (XY). Vektor $\boldsymbol{W}'$ určíme pomocou vektorového súčinu $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{w}'$ vektorov $\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{W}$ podľa napísaného poradia, takže uhol zovretý vektormi $\boldsymbol{W}$ a $\boldsymbol{W}'$ bude menší ako 90°.

Vektor $\boldsymbol{W}' = \dfrac{\boldsymbol{w}'}{|\boldsymbol{w}'|}$ leží súčasne v rovine σ_{kW} a v rovine (XY) ako to vyplýva z vlastností vektorových súčinov. Vektor $\boldsymbol{r}$ vyjadríme pomocou súradníc vektorového súčinu

$$\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \\ \cos\alpha_W, & \cos\beta_W, & \cos\gamma_W \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \cos\beta_W\, \boldsymbol{i} - \cos\alpha_W\, \boldsymbol{j} + 0\, \boldsymbol{k},$$

takže súradnice nejednotkového vektora $\boldsymbol{r}$ budú $\boldsymbol{r} = \{\cos\beta_W; -\cos\alpha_W; 0\}$. Nejednotkový vektor $\boldsymbol{w}'$, pre ktorý platí vzťah

$$\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \\ 0, & 0, & 1 \\ \cos\beta_W, & -\cos\alpha_W, & 0 \end{vmatrix} = \cos\alpha_W\, \boldsymbol{i} + \cos\beta_W\, \boldsymbol{j} + 0\, \boldsymbol{k}.$$

bude mať súradnice $\boldsymbol{w}' = \{\cos\alpha_W; \cos\beta_W; 0\}$. Súradnice jednotkového vektora $\boldsymbol{W}'$ vzhľadom na vzťah

$$\boldsymbol{W}' = \frac{\boldsymbol{w}'}{|\boldsymbol{w}'|} = \frac{\cos\alpha_W}{\sin\gamma_W}\, \boldsymbol{i} + \frac{\cos\beta_W}{\sin\gamma_W}\, \boldsymbol{j} + 0\, \boldsymbol{k}$$

budú

$$\boldsymbol{W}' = \left\{ \frac{\cos\alpha_W}{\sin\gamma_W};\ \frac{\cos\beta_W}{\sin\gamma_W};\ 0 \right\} \tag{28}$$

a pretože $|\boldsymbol{W}'| = 1$ súradnice budú zároveň aj jeho smerovými kosínusmi.

Veľkosť kosínusu uhlovej odchýlky ω vektora W' od vektora L' v rovine (XY) — v mape — bude daná skalárnym súčinom vektorov L' a W, a bude znieť

$$\cos\omega = \frac{\cos\alpha_L \cos\alpha_W + \cos\beta_L \cos\beta_W}{\sin\gamma_L \sin\gamma_W}. \qquad (29)$$

Avšak vzhľadom na to, že vektory W a W' ležia oba v zvislej rovine $\sigma_{kW} \perp \perp (XY)$ a vektory L a L' ležia oba v rovine $\sigma_{kL} \perp (XY)$, pričom vektory W' a L' ležia v priesečniciach rovín σ_{kW}, σ_{kL} s rovinou (XY), bude uhlová odchýlka vektora W' od vektora L' zároveň obrazcom uhla oslnenia δ_{exp} v rovine (XY) ako kolmého priemetu uhla δ_{exp} do tejto roviny, zovretého v priestore vektormi L a W (19). Uhol ω je okrem uvedeného vzťahu zároveň aj obrazcom v rovine (XY) uhla ω_N zovreného jednotkovými vektormi W a L'' v rovine σ_N. Veľkosť uhla ω_N zovreného v dotykovej rovine σ_N k ploche (1) vektormi W a L'' bude daná ich skalárnym súčinom

$$\cos\omega_N = W \,.\, L'' = \cos\alpha_W \cos\alpha_{L''} + \cos\beta_W \cos\beta_{L''} + \cos\gamma_W \cos\gamma_{L''}, \qquad (30)$$

v ktorom smerovými kosínusmi vektorov W a L'' sú vzťahy (18) a (27).

Rovinu (XY) súradnicovej sústavy $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ pre ktorýkoľvek bod vymedzenej časti reliéfu nahradenej plochou (1) môžeme považovať za mapu preto, lebo útvary a vzťahy v nej určené sa pri kolmom priemete sa do základnice reliéfu, t. j. roviny (xy) súradnicovej sústavy $\langle O', \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ nemenia. Preto i naďalej budeme hovoriť iba o rovine (XY) ako o mape.

Pre severné zemepisné šírky $\phi > 23° \, 30'$ možno určiť tri základné prípady vzájomných polôh vektorov N a L a z toho vyplývajúcich polôh vektorov W, L'', W', L' a hodnoty uhla ω.

1. a) Pre smerové kosínusy vektorov N, L, o ktorých platí $\cos\gamma_N > \cos\gamma_L$, t. j. $\gamma_N < \gamma_L$, pričom vektor N sa nachádza v ktoromkoľvek z nasledujúcich oktantov určených súradnicovou sústavou $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$

x	y	z
+	+	+
+	—	+

okrem $N \equiv k$, takže $N \not\equiv k$ (všetky varianty smerov k juhu orientovaných častí reliéfu), budú sa koncové body vektorov W a L'' nachádzať na dolnej pologuli jednotkovej guľovej plochy, t. j. ich Z súradnice budú záporné a veľkosť uhla ω bude $\omega \neq 0°$ okrem momentu, keď $\sigma_{LN} \equiv \sigma_{kN}$, keď vektor $W' \equiv L'$ a $\omega = 0°$, vektor $W \equiv L''$, takže i $\omega_N = 0°$ a rovina uhla oslnenia reliéfu δ_{exp} bude kolmá na rovinu (XY), lebo rovina $\sigma_{LN} \equiv \sigma_{kN} \perp (XY)$.

b) Pre smerové kosínusy vektora N a L, ktorých $\cos\gamma_N < \cos\gamma_L$, t. j. $\gamma_N > > \gamma_L$, pričom vektor N sa nachádza v oktantoch

x	y	z
+	+	+
+	—	+

okrem prípadu $N \equiv k$, bude sa koncový bod vektora W nachádzať v hornej pologuli jednotkovej guľovej plochy ($\cos\gamma_W > 0$) a koncový bod vektora L'' v dolnej pologuli jednotkovej guľovej plochy ($\cos\gamma_{L''} < 0$). Hodnota uhla ω je $\omega \neq 0°$ pre $\sigma_{LN} \not\equiv \sigma_{kN}$. Pre $\sigma_{LN} \equiv \sigma_{kN}$ pri prechode vektora L cez rovinu σ_{kN} na jednotkovej guľovej ploche, hodnota $\omega = 180°$, lebo vektor $W' \uparrow\downarrow L'$, hodnota uhla $\omega_N = 180°$ v rovine σ_N, lebo tak isto vektor $W \downarrow\uparrow L''$.

c) Vektory N a L sa nachádzajú v oktantoch, v ktorých znamienka ich smerových kosínusov sú

N: x	y	z	L: x	y	z
$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$

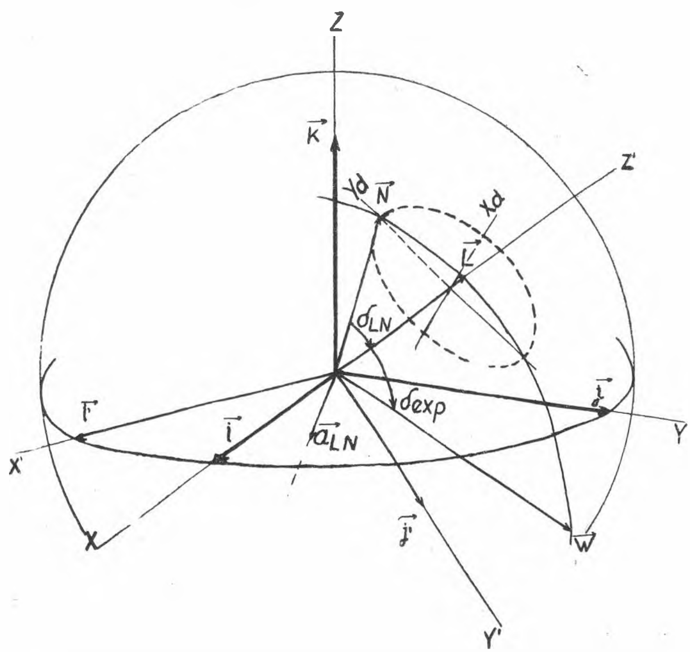
(všetky varianty smerov k severu orientovaných častí reliéfu), pre $N \not\equiv k$ a $\sigma_{LN} \not\equiv \sigma_{kL}$ vektor W sa nachádza v hornej i v dolnej polovici jednotkovej guľovej plochy, čiže $\cos\gamma_W \lesseqgtr 0$, podľa vzájomnej pozície vektorov N a L závislej od času i polohy bodu P na ploche (1), avšak $\omega \neq 0°$ a súčasne $\omega_N \neq$ $\neq 0°$. Pre $\sigma_{LN} \equiv \sigma_{kL}$ bude uhol $\omega = 0°$.

2. Pre smerové kosínusy vektora N $\cos\alpha_N = 0$, $\cos\beta_N = 0$, $\cos\gamma_N = 1$, t. j. $\alpha_N = 90°$, $\beta_N = 90°$, $\gamma_N = 0°$ je vektor $N \equiv k$ a rovina $\sigma_N \equiv (XY)$, z čoho vyplýva aj $W' \equiv L'$ pre ktorúkoľvek polohu vektora L', t. j. pre všetky smery L' v rovine (XY), takže vždy bude $\omega = 0°$ a keďže vzhľadom na $N \equiv k$ je rovina $\sigma_{kN} \equiv \sigma_{LN}$, bude uhol $\delta_{LN} \equiv \gamma_L$, a teda aj uhol δ_{exp} bude ležať v tej istej rovine ako uhol γ_L, kolmej na rov. (XY).

3. Pre smerový kosínus vektora N $\cos\gamma_N = 0$, t. j. $\gamma_N = 90°$, vektor N leží v rovine (XY) a rovina σ_N prechádza vektorom k. Pre rôzne smery vektora L uhol ω sa mení v intervale $(0°, 90°)$.

Ostatné prípady vzájomného postavenia vektorov N a L pre severnú pologuľu Zeme pre všetky $\phi > 23° 30'$ sú variantmi uvedených troch základných prípadov. Pre zemepisné pásmo $+23° 30' > \phi > -23° 30'$ nadobúdajú vektory N a L vo vymedzenom rozsahu vzájomné polohy. Pre južnú pologuľu Zeme sú vzťahy obdobné ako pre sev. zemepisné šírky, iba znamienka sú opačné.

Vo finálnom určení vzťahov vektorov N, L k izalumklínam na ploche (1) i vektorov W' L' v rovine (XY) — v mape, budú smerové kosínusy vektora L v priestore i jeho reprezentanta vektora L' v rovine (XY) v mape, pre určitý ľubovoľne zvolený časový moment, v celej vyhraničenej časti reliéfu konštantné, zatiaľ čo smer vektora normály N plochy (1) bude sa spojito meniť podľa priebehu plochy (1). Zo všetkých hodnôt smerových kosínusov vektora normály N v množine bodov na ploche (1) budú pre naše úvahy dôležité tie hodnoty smerových kosínusov, pre ktoré je hodnota kosínusu uhla δ_{LN} (21) zovretého vektormi L a N rovná konštante, lebo táto množina bodov bude v dôsledku vzťahov (20) vytvárať na ploche (1) i v mape miesta rovnakého uhla oslnenia v danom časovom momente. Otázka teda bude znieť, ako sa budú meniť smerové kosínusy vektorov normál v tých bodoch plochy (1), v ktorých bude splnená podmienka $\cos\delta_{LN} =$ konšt. a na základe vzťahu (20) a $\cos\delta_{exp} =$ $=$ konšt. a akú krivku postupne opíše koncový bod vektora normály N na jednotkovej guľovej ploche. Vzhľadom na to, že smerové kosínusy vektora L sú pre zvolený časový moment konštatné, príslušnú izalumklínu bude tvoriť množina takých bodov plochy (1), v ktorých vektor normály N bude vždy spĺňať podmienku $\cos\delta_{LN}$ = konšt., takže koncový bod jednotkového vektora normály N opíše na jednotkovej guľovej ploche kružnicu, resp. oblúk kružnice o polomere $r = \sin\delta_{LN}$, pričom vektory N umiestené do počiatku súr. sústavy $\langle O, i, j, k\rangle$ vytvoria plášť kužeľa, ktorého osou je nositeľka vektora L. Vzdialenosť d, stredu tejto kružnice (o polomere $r = \sin\delta_{LN}$) od stredu jednotkovej guľovej plochy je $d = \cos\delta_{LN}$, pričom stred kružnice sa nachádza na nositeľke vektora L (obr. 7). Preto množina tých bodov na ploche (1), v ktorých vektor N má tú vlastnosť, že jeho smerové kosínusy sú súradnicami bodov na uvedenej kružnici, tvorí izalumklínu pre zvolený časový moment. Poloha kružnice na jednotkovej guľovej ploche sa bude meniť so zmenou smeru vektora L a taktiež so zmenou veľkosti uhla δ_{LN}. Aby bolo možné určiť parametrické rovnice takto vytvorenej kružnice, transformujme súradnicovú sústavu $\langle O, i, j, k\rangle$ do súradnicovej sústavy $\langle O, i, j' k'\rangle$ pri nezmenenom počiatku O ležiacom v skúmanom bode P na ploche (1), takže sa zmení iba smer osí novej sústavy. Novú súradnicovú sústavu $\langle O, i' j' k'\rangle$ pri nezmenenom počiatku zvoľme tak, aby os Z' ležala vo vektori L, takže jednotkový vektor k' novej báze $\langle i', j', k'\rangle$ bude totožný s vektorom L, čiže $k' \equiv L$ (obr. 6).



Obr. 6.

Vyjadrime vzájomnú závislosť báze $\langle i, j, k\rangle$ pôvodnej sústavy a báze $\langle i', j', k'\rangle$ novej sústavy. Pretože vektor $k' \equiv L$, pričom vektor $L = \{\cos\alpha_L, \cos\beta_L, \cos\gamma_L\}$, vyjadríme smerové kosínusy jednotkových vektorov novej bázy $\langle i', j' k'\rangle$, vzhľadom na bázu $\langle i, j, k\rangle$, pomocou vektorových súčinov $L \times k =$

$= e_1$, pričom $i' = \frac{e_1}{|e_1|}$ (lebo e_1 je nejednotkový vektor), $L \times i' = j$, (kde j' je už jednotkový vektor lebo $|i'| = |L| = 1$ a $i' \perp L$). Pre nejednotkový vektor e_1 platí, že

$$e_1 = \begin{vmatrix} i \;, & j \;, & k \\ \cos\alpha_L, & \cos\beta_L, & \cos\gamma \\ 0 \;, & 0 \;, & 1 \end{vmatrix} = \cos\beta_L \, i - \cos\alpha_L \, j + 0\, k,$$

takže jednotkový vektor i' vzhľadom na súradnice vektora $e_1 = \{\cos\beta_L, -\cos\alpha_L, 0\}$ vyjadríme po úprave vzťahom

$$i' = \frac{e_1}{|e_1|} = \frac{\cos\beta_L}{\sin\gamma_L} i - \frac{\cos\alpha_L}{\sin\gamma_L} j + 0\, k$$

a jeho súradnice

$$i' = \left\{ \frac{\cos\beta_L}{\sin\gamma_L}; -\frac{\cos\alpha_L}{\sin\gamma_L}; 0 \right\} \tag{31}$$

budú zároveň aj jeho smerovými kosínusmi.

Pre jednotkový vektor j' potom platí vzťah

$$j' = \begin{vmatrix} i \;, & j \;, & k \\ \cos\alpha_L, & \cos\beta_L, & \cos\gamma_L \\ \frac{\cos\beta_L}{\sin\gamma_L}, & -\frac{\cos\alpha_L}{\sin\gamma_L}, & 0 \end{vmatrix},$$

takže jeho súradnice po úprave budú

$$j' = \left\{ \frac{\cos\alpha_L \cos\gamma_L}{s \sin\gamma_L}; \frac{\cos\beta_L \cos\gamma_L}{\sin\gamma_L}; -\sin\gamma_L \right\} \tag{32}$$

a vzhľadom na $|j'| = 1$, budú zároveň aj jeho smerovými kosínusmi v báze $\langle i, j, k \rangle$, pričom však v (32) je $\sin\gamma_L \neq 0$.

Vzťah medzi súradnicami (x, y, z) a $(x' \; y' \; z')$ toho istého bodu, vzhľadom na súradnicové sústavy $\langle O, i, j, k \rangle$ a $\langle O, i' \; j' \; k' \rangle$ vyjadrujú takzvané transformačné rovnice

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\cos\beta_L}{\sin\gamma_L} x' + \frac{\cos\alpha_L \cos\gamma_L}{\sin\gamma_L} y' + \cos\alpha_L \, z' \\ y &= -\frac{\cos\alpha_L}{\sin\gamma_L} x' + \frac{\cos\beta_L \cos\gamma_L}{\sin\gamma_L} y' + \cos\beta_L \, z' \\ z &= 0\, x' - \sin\gamma_L \, y' + \cos\gamma_L \, z' \end{aligned}\right\} . \tag{33}$$

Parametrické rovnice kružnice vytvorenej končovými bodmi vektorov normál N okolo vektora L pri uhle δ_{LN} = konšt. v novej sústave $\langle O, \boldsymbol{i}' \boldsymbol{j}' \boldsymbol{k}' \rangle$ potom budú

$$\begin{aligned} x' &= \sin\delta_{LN} \cos t \\ y' &= \sin\delta_{LN} \sin t \\ z' &= \cos\delta_{LN}, \end{aligned} \tag{34}$$

kde $\sin\delta_{LN} = C_1$, $\cos\delta_{LN} = C_2$, pričom C_1, C_2, sú konštanty a t je premenný parameter.

Parametrické rovnice kružnice (34) vzhľadom na pôvodnú súradnicovú sústavu $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$ po úprave budú

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\cos\beta_L \sin\delta_{LN}}{\sin\gamma_L} \cos t + \frac{\cos\alpha_L \cos\gamma_L \sin\delta_{LN}}{\sin\gamma_L} \sin t + \cos\alpha_L \cos\delta_{LN} \\ y &= -\frac{\cos\alpha_L \sin\delta_{LN}}{\sin\gamma_L} \cos t + \frac{\cos\beta_L \cos\gamma_L \sin\delta_{LN}}{\sin\gamma_L} \sin t + \cos\beta_L \cos\delta_{LN} \\ z &= -\sin\gamma_L \sin\delta_{LN} \sin t + \cos\gamma_L \cos\delta_{LN} \end{aligned}\right\}, \tag{35}$$

kde t je premenný parameter v intervale $0° \leq t \leq 360°$, ostatné veličiny sú pre zvolený vektor L konštanty a menia sa so zmenou časového intervalu. Preto ak konštanty v prvej rovnici pri x na pravej strane označíme postupne C_{11}, C_{12}, C_{13}, v druhej rovnici na pravej strane C_{21}, C_{22}, C_{23} a v tretej rovnici pri z $C_{31} = 0$, C_{32}, C_{33} parametrické rovnice (35) môžeme písať

$$\begin{aligned} x &= C_{11} \cos t + C_{12} \sin t + C_{13} \\ y &= C_{21} \cos t + C_{22} \sin t + C_{23} \\ z &= \phantom{C_{11} \cos t} + C_{32} \sin t + C_{33}. \end{aligned} \tag{35'}$$

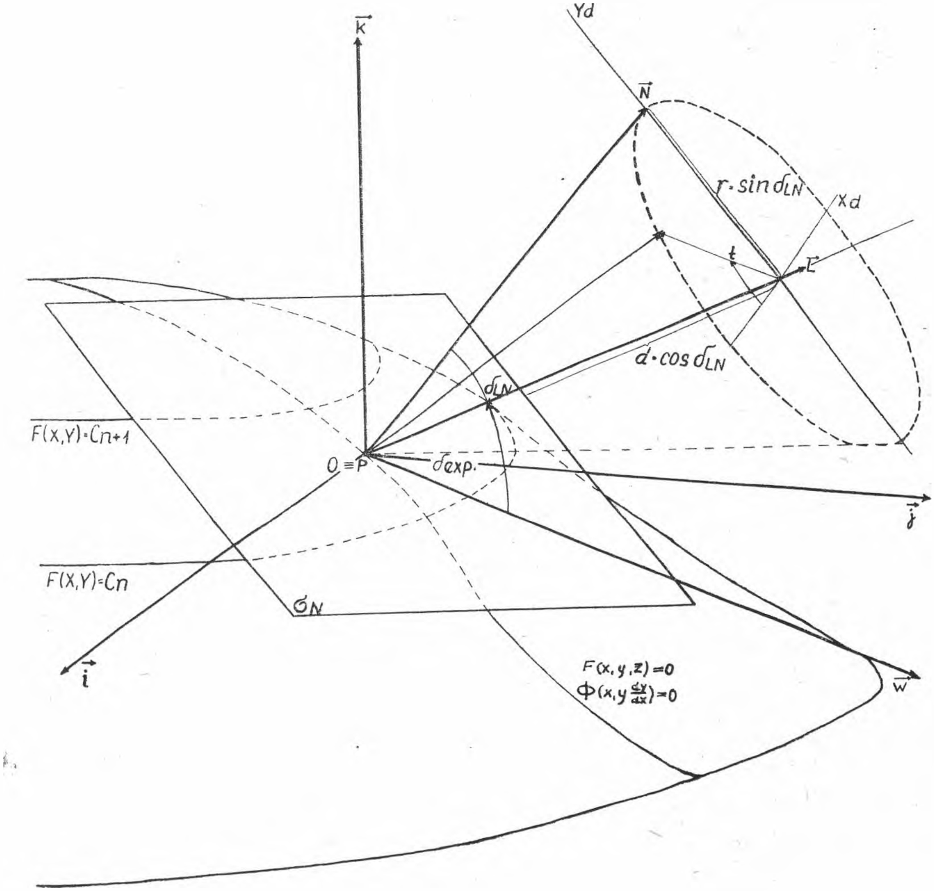
Súradnice x, y, z bodov uvažovanej kružnice (35), (35') v pôvodnej súr. sústave, ktoré sú funkciami parametra t sú zároveň smerové kosínusy vektora nor-mály N v tých bodoch na reliéfe, ktoré tvoria izalumklínu pre zvolenú hodinu a uhol δ_{LN} (obr. 7).

Pre rozhranie svetla a tieňa na ploche (1) platí, že vektor $L \perp N$, to znamená, že $\delta_{LN} = 90°$, takže $\cos\delta_{LN} = 0$. Miesta na reliéfe nie sú oslnené pre $\delta_{LN} > 90°$, preto sa nachádzajú v tieni. Do tieňa postupne prechádzajú aj tie miesta na reliéfe, pre ktoré síce $\delta_{LN} < 90°$, takže potencionálne by mali byť oslnené, avšak nachádzajú sa v zákryte susedných prevýšených častí reliéfu.

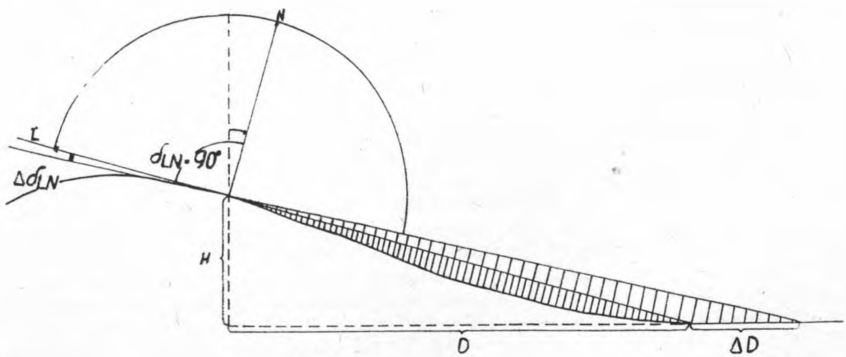
Dĺžka tieňa a jeho zmena záleží od veľkosti prevýšenia Hp susedného miesta reliéfu nachádzajúceho sa pre danú hodinu na rozhraní svetla a tieňa a na zmene uhla δ_{LN} o $\Delta\delta_{LN}$ za časovú zmenu ΔT. Pre zmenu uhla δ_{LN} o $\Delta\delta_{LN}$ zmení sa dĺžka D zákrytovej oblasti o ΔD (obr. 8). Veľkosť zmeny ΔD záleží okrem zmeny uhla o $\Delta\delta_{LN}$ aj od uhla sklonu príslušného miesta na reliéfe a jeho orientácie vzhľadom na smer vrhaného tieňa. Pre dĺžku vrhaného tieňa platí elementárny vzťah

$$D = Hp \,.\, \operatorname{cotg}\eta',$$

kde η' je uhol dopadu slnečného lúča vzhľadom na vodorovnú rovinu (XY), čo potom platí aj pre rovinu (xy) (obr. 1, 2).


Yd
N
r·sin σLN
Xd
t
L
d·cos σLN
σLN
F(x,y)=Cn+1
O≡P
σexp.
j
F(X,Y)=Cn
σN
i
F(x,y,z)=0
Φ(x,y dy/dx)=0
w
k

Obr. 7.


N
L
σLN·90°
ΔσLN
H
D
ΔD

Obr. 8.

Možno vysloviť záver, že nejaká oblasť na reliéfe nebude oslnená pre tú hodinu, pre ktorú jej odpovedajúce izalumklíny v tejto oblasti chýbajú.

Konštrukciu dĺžky tieňa pre jednotlivé časové momenty o dĺžke časových intervalov 1 hod., možno previesť pomocou tzv. tieňových diagramov [13]. V ich aplikácii na reliéf je však potrebné previesť korekciu dĺžky tieňa vzhľadom na veľkosť a smer uhla sklonu na reliéfe v smere vrhaného tieňa.

Izalumklíny možno zovšeobecniť vo vzťahu k izalumchrónam i na dlhšie časové obdobie a stanoviť optimum i minimum oslnenia pre skúmanú oblasť na reliéfe a jeho uhlovú a časovú zmenu. Problém však svojou povahou tvorí už ďalšiu ucelenú tému, a preto bude spracovaný v samostatnom príspevku.

Poznámka redakcie. Upozorňujeme čitateľov, že na označenie vektorov použila tlačiareň iný typ písma, pretože t. č. nemá typ písma bežne používaný na označovanie zaužívanej vektorovej symboliky.

LITERATÚRA

1. Gassman F., Gutersohn H., *Kotenstreuung und Relieffaktor*. Geogr. Helv. II. Nr. 1. Bern 1947. — 2. Götschmann H., *Eine Untersuchung über die Veränderung der Sonnenscheindauer in den letzten Vierzich Jahren*. Zeit. für. Meteor. H. 7, 9 B. 14. Berlin 1960. — 3. Imhof E., *Isolinienkarten*. Intern. Jahrbuch für Kartogr. I. 1961. — 4. Imhof E., *Heutiger Stand und weitere Entwiklung der Kartographie*. Kartogr. Nachricht. XII, Nr. 1. 1962. — 5. Kaempfert W., Morgen A., *Die Besonnug*. Meteorologie B. 6, H. 5, 1962. — 6. Krcho J., *K problému zostrojenia máp gradientov spádu, máp izoklín, izalumklín a izalumchrón*. Geogr. čas. XVI, 1, 1964. — 7. Krcho J., *Morfometrická analýza spádových pomerov Košickej kotliny*. Acta geol. et geogr. Universit. Comenianae, Nr. 4. Bratislava 1964. — 8. Kudrnovská O., *Exposice topografické plochy*. Kart. přehled r. 1953. — 9. Látal A., Látalová B., *Grafické znázornění oslunění ploch*. Meteorologické správy r. 1950, Nr. 1, 2. — 10. Tonne F., Normann W., *Die Berechnung der Sonnenwärmesstrahlung auf sekkrechte und beliebig geneigte Flächen unter Berücksichtigung meteorologischer Messungen*. Zeit. f. Meteor. H. 7, 9 B. 14. 1960. — 11. Šalamon B., *Některé morfometrické charakteristiky krainných reliefů* Kart. př. VII, Nr. 1, 2. — 12. Vinaccia G., *I problemi analitici della tecnica scientifica urbanistica*. Universo XXIX, Roma 1949. — 13. Krch V., *Oslunění budov a vnitřků*. Tech. — věd. vyd. Praha 1952.

Recenzoval F. Kuska, M. Lukniš, M. Grajciar

Jozef Krcho

THE INSOLATION OF RELIEF IN AN OPTIONAL ANGLE AND TIME AS WELL AS ITS REPRESENTANTATION ON MAPS BY MEANS OF ISALUMCLINES

In this contribution the question of relief insolation under an angle as well as the question of angle change according to the change of time is solved. The question of insolation is solved by means of isolines so called isalumclines. Let us define the isalumcline as a set of points on relief with a constant insolation angle at a given instant. By means of isalumclines constructed for an optionally selected number of time instants ever after regular time intervals on a certain day, a potential time length of insolation at an investigated place on relief and at the same time the angle change of insolation at that time may be ascertained then. By means of the isalumclines constructed on equal sufficiently dense time intervals, a course of angle values of the insolation on relief in time may be ascertained and on this basis the potential length of insolation of the individual parts of relief may be ascertained, too. As a result from the above mentioned the possibility of delimitting the individual relief parts insolated for an equal time length in the same part of day as well as in various parts of day (for example during the time between 6—9, 7—10, 13—16 hours and so on, further during the time between 6—11, 9—14, 13—18

hours and so on will follow. Let us define then the lines joining places insolated for an equal time length as isalumchrones (6). The insolation of relief as well as the angle and time régime of insolation may be generalized also for a greater time section, for example for month or vegetation season. In this contribution the idea substance of isalumclines is solved. Let us solve to advantage the problem using analytical geometry as well as vector algebra. Let the preconditions expressed in the works (6, 7, 11) hold good for the area and properties of an investigated territory. Such a large part of a relief in which the curvature of geoid may be unnoticed will be considered in the Carthesian coordinate system $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$, moreover the plane xy is held in the sense (6, 7, 11) for a biass of the relief (Fig. 1). Since the influence of geoid curvature is unnoticed (200 sq. km), the angle of insolation for the plane xy as for the basis of the relief is constant at the given time. Therefore the investigated point P on the relief in any place of the relief may be the origin of a new coordinate system $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ at the same time, moreover the validity of derived relations in the point P will be kept for the whole considered part of relief. In the system $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ let us consider also a unit spherical surface (its radius $r = 1$) as an auxiliary quantity, the centre S of which will be identical with the origin O of this system, so that $S \equiv O \equiv P$. The advantage of this will be that the coordinates of terminal points of the unit vectors getting out from the origin O of the system $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ will be also the directional cosines of these vectors. Let us identify the centre S' of the unit spherical surface of the celestial sphere with the centre S of the considered auxiliary unit spherical surface in the system $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$, so that $\acute{S} \equiv S \equiv O \equiv P$. The sun's horizontal coordinates $A\odot$, $h\odot$ in the system of horizontal spherical coordinates may be also expressed by means of the coordinates x, y, z of the coordinate system $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$. If a sunbeam reaching the point P is held for a subject of the unit vector $\boldsymbol{L}$, then the coordinates x, y, z of the vector $\boldsymbol{L}$ of the coordinate system $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ will be also its directional cosines at the same time. The directional cosines of the vector $\boldsymbol{L}$ will be constant for any point of the considered relief part and for the selected time instant. The consideration made for the point P of the surface (1) will be valid for the whole basis of the relief. The continuous surface by which we shall replace the relief having properties according to the works (6, 7, 11) is given by the equality (1) (Fig. 1) in the coordinate system $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$. The vector of the normal N in the point P of the surface (1) has its directional cosines (3) within the coordinate system $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ and the equality of the tangential plane to the surface (1) in the point P has its form (4). The equality of the surface may be given only by means of the general model (1), the coordinates of its points, however, may be measured from a largescale map. The equality (4) of the tangential plane σ_N in the point P may be expressed by means of the vector of the normal $\boldsymbol{N}$ in the normal's form (6) within the system $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$. Let us hold the vector $\boldsymbol{N}$ for a unit one regarding the auxiliary unit spherical surface and in the following considerations let us consider the system $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$, where $O \equiv P$. From a map in a large scale the directional cosines of the vector $\boldsymbol{N}$ may be determined by means of the transformational equalities (7), where the angle σ_N is a horizontal one formed by the vectors $\boldsymbol{i}$ and $\boldsymbol{N}'$ (the vector $\boldsymbol{N}'$ is the vertical projection of the vector $\boldsymbol{N}$ into the plane xy) and the angle γ_N is formed by the vectors $\boldsymbol{k}$ and $\boldsymbol{N}$ and is equivalent to the angle of slope in the point P (Fig. 2). The equality of the plane σ_L vertical to the unit vector $\boldsymbol{L}$ within the coordinate system $\langle O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle$ in the normal's form is (8). If $\boldsymbol{L} \not\equiv \boldsymbol{N}$, then the planes σ_N and σ_L intersection each other in the line of intersection a (9). There lies the vector $\boldsymbol{a}_{LN}$ in the line of intersection and is given by the vector product (10) of the vectors $\boldsymbol{L}$ and $\boldsymbol{N}$, when $\boldsymbol{L} \not\equiv \boldsymbol{N}$, and its coordinates are (12) and directional cosines (14). The equality of the plane σ_{LN} passing through the vectors $\boldsymbol{L}$ and $\boldsymbol{N}$ is given by means of the vector of the normal $\boldsymbol{a}_{LN}$ in the form (15). There lies the unit vector $\boldsymbol{W}$ in the line of intersection of the planes σ_{LN} and σ_N. We obtain the vector $\boldsymbol{W}$ by means of the vector product $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{a}_{LN} = \boldsymbol{w}$, where $\boldsymbol{W} = \dfrac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|}$, so that $\boldsymbol{W} = 1$ and its coordinates (18) will be also its directional cosines. The angle of relief insolation δ_{exp} formed by the vectors $\boldsymbol{L}$ and $\boldsymbol{W}$ forms together with the angle δ_{LN} formed by the vectors $\boldsymbol{L}$ and $\boldsymbol{N}$ a complement to 90°, so that the (20) holds good. The vector $\boldsymbol{L}$ forms the upper side of the angle of insolation δ_{exp} and the vector $\boldsymbol{W}$ the lower one. We obtain the angle of insolation by means of the scalar product (19) of the vectors $\boldsymbol{L}$ and $\boldsymbol{W}$, the angle δ_{LN} by means of the scalar product (21) of the vectors $\boldsymbol{L}$ and $\boldsymbol{N}$. The value of the angle δ_{exp} will reach its maximum at the time instant, when the vector $\boldsymbol{L}$ is situated in the plane σ_{kN} crossing the vectors $\boldsymbol{k}$ and $\boldsymbol{N}$ ($\sigma_{kN} \perp xy$). A representant of the vector $\boldsymbol{W}$ in the map is the vector W', which determines the location of the lower side of the insolation angle δ_{exp} with regard to the contour lines on the map. The vector W' is to obtain by means of the vector products $k \times W = r$ and $k \times r = w$ with accordance to the above sequence, where the vector $W' = \frac{w'}{|w'|}$ and its coordinates (28) will be also its directional cosines at the same time. The unit vector L' (25), (26) is situated in the line of intersection of the perpendicular plane σ_{kL} passing through the vector k and L and of the plane xy. We obtain it by means of the vector products $L \times k = p$, $k \times p = l'$, where $L' = \frac{l'}{|l'|}$. The angle formed by the vectors L' and W' is a picture of the angle δ_{exp} on the map and is obtainable by means of the scalar product of the vectors L' and W' (29). The isalumcline for a certain time instant (the direction of the vector L is constant) is formed by a set of points on the relief within which on the basis of the relation (20) δ_{LN} = constant and δ_{exp} = constant. For a constant direction of the vector L with a change of place on the surface (1) changes also the direction of the vector N, the terminal point of which for the selected δ_{LN} = const., and successively circumscribes a circle, respectively a circle arc with a radius $r = \sin \delta_{LN}$ in the considered unit spherical surface. The distance of the centre of circle, respectively of the circle arc from the centre of the unit spherical surface is $d = \cos \delta_{LN}$, moreover the centre of circle is situated in the subject of the vector L (the sunbeam) (Fig. 7). Therefore the set of points on the relief (1), in which the vector N has the property that its directional cosines are the coordinates of points on the above mentioned circle, forms the isalumcline for the selected time instant. The location of the circle on the unit spherical surface will change with accordance to the direction of the vector L as well as to the change of magnitude of the angle δ_{LN}. Then let us transform the system $\langle O, i, j, k\rangle$ with a non-changed origin O into the system $\langle O, i', j', k'\rangle$. The parametric equalities of the circle circumscribed on the unit spherical surface with the terminal point of the vector N within the system $\langle O, i', j', k'\rangle$ are (34) and in the original system $\langle O, i, j, k\rangle$ with regard to the transformational equalities (33) are (35), respectively (35'). We select the parameter t optionally within the interval $0° \leqslant t \leqslant 360°$. The set of points on the relief (1) in which the directional cosines of the vectors of the normal N answer the system of equalities (35), (35') forms the isalumcline at the selected time instant.

From Slovak translated by A. Krajčír