Tatra Mt. Math. Publ. **31** (2005), 131–176

TATRA MOUNTAINS
Mathematical Publications

UN OUTIL INCOMPARABLE : L'ULTRAFILTRE

Labib Haddad

ABSTRACT. The ultrafilter, a peerless tool. This paper was meant for a series of talks at the Bratislava Workshop on the density concept, May 2004. A number of the very many facets of ultrafilters are reviewed (some of them, a bit cursorily, as is to be expected in a short space, and time) including Condorcet's paradox, ultraproducts and the theory of infinitesimals (nonstandard analysis), Banach generalized limits in sequence spaces, Choquet's limits for families of closed sets in general topology and intrinsic geometry, representations of topologies as binary relations among ultrafilters, additive bases in number theory. Peerless indeed, and Protean!

Remerciements. Dans son rapport, l'arbitre anonyme a établi une liste de questions demandant des précisions au sujet de "certaines notions trop rapidement esquissées". Il a également relevé près d'une trentaine de "fautes de frappe" dans la première version de ce texte. Je tiens à le remercier, bien vivement, de tout le soin qu'il a mis à sa lecture. J'ai, bien entendu, corrigé ces "coquilles" et inséré, entre accolades, les éclaircissements demandés. Je voudrais également remercier Georges Grekos qui a lu très attentivement la première version du texte, m'a signalé aussi des fautes de frappe et m'a prodigué de nombreux conseils avisés, et amicaux, dont j'ai tenu le plus grand compte.

Ce texte avait été initialement rédigé afin de servir à une suite d'exposés destinés à l'Atelier de Bratislava sur la notion de densité (mai 2004). Il en garde un peu le style *parlé* lequel, je l'espère, ne nuira pas à la clarté.

La notion d'ultrafiltre, puisque c'est de cela qu'il s'agit, a été introduite par Henri Cartan dans deux courtes Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, en 1937, pour les besoins de la topologie générale [3].

Les ultrafiltres, on le sait bien, à présent, "sont des objets situés au grand carrefour de presque tous les chapitres de la mathématique (théorie des ensembles, algèbre, topologie, analyse, logique, probabilités). De ce fait, ils sont susceptibles de présentations, illustrations et interprétations très nombreuses et variées" [8].

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 00A99, 03H05, 11B13, 54A20, 91B12.
Keywords: ultrafilters, Condorcet's paradox, general topology, limits, ultraproducts, nonstandard analysis.

Je rappellerai quelques-unes de leurs définitions, toutes équivalentes, naturellement. Cela devrait faire apparaître clairement leur caractère protéiforme, celui qui en fait toute la richesse.

Cependant, je ferai d'abord une petite digression qui finira par nous ramener, tout de même, à notre sujet.

1. Une élection imaginaire

Imaginons une élection triangulaire où le corps électoral est amené à choisir parmi trois candidats A, B, C. Imaginons que ce corps électoral soit partagé en trois courants. L'un des courants préfère le candidat A au candidat B, et B à C. Un autre courant place le candidat B en tête suivi de C, lui-même suivi de A. Enfin, le dernier courant met le candidat C en premier puis A, puis B. Imaginons que ces trois courants aient des partisans en parts égales.

Le schéma suivant permet de résumer la situation.

$A > B > C \quad 1/3,$

$B > C > A \quad 1/3,$

$C > A > B \quad 1/3.$

Un tiers des électeurs est ainsi partisan de A, un autre tiers de B et un dernier tiers de C. Il n'y a point de majorité pour faire élire l'un des candidats dès le premier tour. Imaginons un mode de scrutin quelconque, par exemple celui de l'élection présidentielle en France (qui tiendra compte de l'âge des candidats, en l'occurrence, pour cause d'égalité dans la répartition du nombre de voix). Imaginons que l'un des trois candidats soit enfin élu.

Lendemain d'élection. Dans toute situation semblable, il y aura toujours une majorité de mécontents.

Le phénomène n'est pas si rare qu'il n'ait déjà été remarqué, depuis qu'il y a des hommes et qui votent. Il y a cependant une chose remarquable dans cette affaire.

Quel que soit le mode de scrutin, quel que soit l'élu, il se trouvera toujours une majorité pour lui préférer un même autre candidat. Ainsi, par exemple, si A était désigné, il y aurait une majorité confortable des deux tiers pour lui préférer C. De même, si C était élu, il y aurait également une majorité des deux tiers pour lui préférer B. Si B l'avait emporté, il y aurait eu une majorité des deux tiers pour lui préférer A.

Dans une élection triangulaire, il peut se trouver une majorité d'électeurs pour préférer à l'élu lui-même l'un des candidats battus.

Telle est, brièvement présentée, l'une des formes du paradoxe de Condorcet.

Lendemain d'élection. Si même l'on renonçait à désigner un vainqueur, si l'on se résignait à n'établir qu'un simple classement, on aboutirait à une situation tout aussi paradoxale où A serait préféré à B, B à C et C à A, chacune de ces préférences étant le vœu d'une majorité des deux tiers, jamais la même, chaque fois une autre ! Une situation *à la Condorcet.*

En tentant d'agréger des préférences individuelles, on arriverait à un classement collectif circulaire, "incohérent".

On pourrait faire varier la situation et les pourcentages et aboutir encore à un résultat semblable : une majorité de mécontents, quel que soit l'élu, prête à faire élire l'un des candidats battus, comme dans l'exemple suivant.

Trois candidats, A, B, C. Sur cent électeurs, 45 sont partisans de A, 25 de B et 30 de C. Sur les 45 partisans de A, il en est 20 qui préfèrent B à C, et 25 qui préfèrent C à B. Pour les 25 partisans de B, le partage se fait comme suit : 10 préfèrent A à C et 15 préfèrent C à A. Enfin, les 30 partisans de C préfèrent tous B à A.

Ce que résume le schéma suivant :

$A > B > C$ 20 électeurs,

$A > C > B$ 25,

$B > A > C$ 10,

$B > C > A$ 15,

$C > B > A$ 30.

Répétons-nous. Quel que soit le mode de scrutin, quel que soit l'élu, non seulement il y aurait une majorité de mécontents, mais il se trouvera une majorité prête à renverser le résultat de l'élection en faveur d'un même battu.

En effet...

Lendemain d'élection. Si A est élu, 55 électeurs contre 45 lui préfèrent B. De même, si c'est B qui est élu, 55 électeurs contre 45 lui préfèrent C. Enfin, dans le cas où C serait élu, on se retrouverait avec 55 électeurs contre 45 à lui préférer A.

Dans une telle situation, quelle que soit la manière de s'y prendre pour sortir de l'impasse, il se trouvera toujours une majorité prête à s'accorder pour lui préférer une autre solution.

Lendemains d'élections ! [9].

2. Deux étapes

1785. Cette conséquence inévitable du scrutin majoritaire, Condorcet a été l'un des premiers à la mettre en relief et à l'analyser, dans le Discours préliminaire à son [5].

1952. G. Th. Guilbaud attirant à nouveau l'attention sur ce phénomène, l'a baptisé **effet Condorcet**, dans un texte **remarquable** et important [6].

Effet Condorcet. Le mal est profond. Ainsi, par exemple, un club peut très bien vouloir pour emblème, tout à la fois, et à la majorité, un quadrilatère convexe qui aurait quatre angles égaux et quatre côté égaux mais qui ne serait pas un carré !

Si l'on veut éviter l'effet Condorcet, on ne peut pas conserver le système majoritaire. Ou alors, il faudrait le modifier par une extension de la notion de majorité.

Guilbaud introduit la notion suivante de *système de vote généralisé* et en analyse le fonctionnement.

Parmi tous les regroupements possibles au sein d'une assemblée A, on pourrait, par exemple, en distinguer un certain nombre, à l'avance, pour tenir le rôle des majorités. On les désignerait sous le nom de *coalitions efficaces* (pour les distinguer des majorités au sens ordinaire), et il serait entendu que l'assemblée entérine tous les choix (et ceux-là seulement) qui seraient approuvés par l'une (quelconque) de ces coalitions efficaces.

3. Systèmes de vote

Soit A une assemblée. Chaque partie K de A sera appelée **coalition**. On posera $K^c = A \setminus K$ pour désigner la coalition opposée à (ou complémentaire de) K.

Un **système de vote** pour l'assemblée A est la donnée d'un ensemble $\mathcal{E}$ de coalitions de A (devant servir de substituts aux majorités ordinaires). Autrement dit, $\mathcal{E}$ est une partie de l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties de l'ensemble A. {Les éléments de $\mathcal{E}$ sont, par définition, les coalitions **efficaces**.}

Le fonctionnement du système $(A, \mathcal{E})$ est le suivant. Les questions soumises à l'assemblée sont des choix dichotomiques auxquels les membres de l'assemblée répondent par **oui** ou par **non**. Se forment ainsi deux coalitions, celle des **pour** et celle des **contre**. Ces deux coalitions sont complémentaires. [Le choix étant dichotomique, il n'y a pas de place pour l'abstention. On dira plus loin pourquoi cela ne constitue pas une contrainte réelle puisque tout choix multiple se ramène à un ensemble convenable de choix dichotomiques.] De ces deux coalitions l'emporte celle qui est efficace, autrement dit celle qui appartient à $\mathcal{E}$.

Si l'on veut alors que l'assemblée ne puisse, en même temps et d'un même mouvement, accepter et rejeter un choix, et si l'on veut également que l'assemblée se détermine en toutes circonstances, il faut (et il suffit) d'imposer la condition suivante à l'ensemble $\mathcal{E}$:

C1 Une coalition est efficace si et seulement si la coalition opposée ne l'est pas.

Si l'on veut de plus, que devant deux choix consécutifs, l'assemblée ne se déjuge pas, autrement dit, si l'on veut que devant deux choix incompatibles l'assemblée ne puisse adopter les deux à la fois, il faut, et il suffit, d'imposer également la condition suivante :

C2 Toute coalition qui contient une coalition efficace est elle-même efficace.

En effet, dire que les deux choix u et v sont incompatibles revient à dire qu'on ne saurait être à la fois **pour** u et **pour** v. Autrement dit, la coalition u^+ des **pour** u est contenue dans la coalition v^- des **contre** v et, de même, v^+ est contenue dans u^-.

En abrégeant, les deux conditions s'écrivent :

C1 $K \in \mathcal{E}$ si et seulement si $K^c \notin \mathcal{E}$.

C2 Si $L \supset K \in \mathcal{E}$ alors $L \in \mathcal{E}$.

On vient ainsi de vérifier que ces deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour que le système évite *les ratés les plus élémentaires* : l'assemblée peut choisir en toutes circonstances et aucune de ses décisions ne saurait en contredire une autre.

Dans la suite, tous les systèmes de vote considérés seront supposés satisfaire les deux conditions C1 et C2.

Cela ne suffit pourtant pas à écarter les situations **à la Condorcet**, comme le montre l'exemple du système majoritaire classique ! En effet, ce dernier satisfait les deux conditions **C1** et **C2** et pourtant, comme on l'a vu, il n'est pas à l'abri des situations paradoxales de C o n d o r c e t .

4. Remarques

On observera que la condition **C1** entraîne la conséquence suivante : deux membres distincts x et y de l'assemblée ne peuvent appartenir à toutes les coalitions efficaces à la fois, puisque, du singleton $\{x\}$ et de son complémentaire, une seule des deux coalitions est efficace !

Cette même condition **C1** implique qu'il y a autant de coalitions efficaces que de coalitions inefficaces.

Il est bien clair aussi que les conditions **C1** et **C2** réunies font que l'unanimité est efficace ! et que la coalition vide est inefficace !

5. Deux exemples "classiques"

L'exemple-type de système de vote est le **système majoritaire** dans lequel sont efficaces, par définition, les coalitions majoritaires, *i.e.,* celles qui surnombrent leurs opposées. Ce système satisfait bien la condition **C2** mais il ne satisfait la condition **C1** que pour une assemblée ayant un nombre impair de membres. Pour une assemblée paire, il y a un moyen très couramment employé pour éviter ce défaut en introduisant une voix *prépondérante.*

Le "système majoritaire avec **voix prépondérante** du président" se définit en distinguant un membre particulier a de l'assemblée ("le président", le "doyen d'âge" ou toute autre personne désignée à l'avance) et en déclarant "majoritaire" toute coalition qui surnombre son opposée ainsi que toute coalition qui renferme le président et qui possède le même nombre de membres que son opposée. Ce système satisfait toujours les deux conditions **C1** et **C2**, que l'assemblée soit paire ou impaire.

On notera au passage que rien n'interdit de considérer un "système majoritaire avec **voix minorée** d'un contre-président" comme pourrait le faire un groupe d'écoliers en minorant la voix du benjamin !

L'autre système le mieux connu est le système **dictatorial** : un membre particulier d de l'assemblée est désigné (ou, plus souvent, se désigne lui-même !), les coalitions efficaces étant celles dont le dictateur d est membre.

Dans ce système dictatorial, qui satisfait naturellement les conditions **C1** et **C2**, seule compte l'opinion du dictateur.

On remarquera que le singleton $\{d\}$ est alors *la plus petite* des coalitions efficaces, *i.e.,* elle est contenue dans toute autre coalition efficace. On observera de même, réciproquement, qu'un système de vote satisfaisant les conditions **C1** et **C2** et possédant une plus petite coalition efficace est nécessairement dictatorial. En effet, en vertu d'une remarque déjà faite (au **4**), cette plus petite coalition efficace est nécessairement un singleton.

6. Quelques compléments

(1) **Le cas des choix multiples**. – Dans une question à choix multiples, on peut coder l'ensemble des choix à l'aide de la numération binaire. On peut ainsi ramener ces choix multiples à une succession de choix dichotomiques.

En particulier, dans un vote par "oui" ou par "non", on pourra toujours, en procédant ainsi, faire la place et autoriser, tout aussi bien, l'abstention, le vote blanc, le refus de vote, ou tout autre choix que voudrait faire la communauté, sans rien enlever au mode de fonctionnement dichotomique décrit ci-dessus.

(2) **La méthode des pondérations**. – Le système majoritaire connaît une variante, celle de la **pondération** des voix qui généralise, à la fois, le "système majoritaire avec voix prépondérante du président" et le "systéme majoritaire avec voix minorée d'un contre-président" (ainsi que le système dictatorial !).

À chaque membre x de l'assemblée A est attribué un "poids" $p(x)$. Le poids $p(K)$ d'une coalition K est défini comme étant la somme des poids de ses membres. Une coalition K est alors qualifiée d'efficace lorsque son poids excède celui de la coalition opposée K^c, *i.e.,* lorsque l'on a $p(K) > p(K^c)$. Les poids $p(x)$ ne sont pas nécessairement des entiers ; on peut également utiliser des nombres réels quelconques [voire les éléments d'un groupe totalement ordonné quelconque].

On voit facilement que le système ainsi construit vérifie les conditions **C1** et **C2** si (et seulement si) les poids $p(x)$ ne sont jamais négatifs et aucune coalition n'a le même poids que son opposée.

(3) **Un contre-exemple**. – Voici un exemple très simple de système de vote $(A, \mathcal{E})$ qui satisfait les conditions **C1** et **C2** mais qui ne peut s'obtenir par aucune pondération. Sur le plan projectif fini A ayant 7 points, on définit $\mathcal{E}$ comme l'ensemble des parties du plan qui contiennent au moins 5 points ou l'une au moins des 7 droites du plan.

(4) Un calcul relativement simple montre que, pour une assemblée de trois personnes, et en supposant l'équirépartition des opinions, la probabilité de se trouver dans une situation à la Condorcet dans une élection entre trois candidats est égale à 1/18, soit un peu plus de 5,5 pour cent des cas.

(5) **Trois amis**. – Trois amis x, y, z, décident d'aller au cinéma. Ils ont le choix entre trois films, a, b, c. Leurs préférences s'ordonnent ainsi : x aimerait mieux voir a que b, et b que c ; pour y c'est b mieux que c, et c mieux que a ; pour z, enfin, ce sera c plus que a, et a plus que b. En comparant les films deux deux, en procédant par votes, les trois amis auront tôt fait de se retrouver devant le classement circulaire suivant : a plus que b plus que c plus que a. **Belle miniature de l'effet Condorcet**.

Heureusement, la situation, là, n'est pas si grave. On sait que le plus persuasif, le plus charmeur des trois amis finira par l'emporter. Si ce classement circulaire ne se reproduit pas davantage que dans 5,5 pour cent des cas, nul ne s'en inquiétera. Si la fréquence est encore nettement plus faible, c'est que l'amitié se double, ici, d'une communauté de penchants. Si elle est beaucoup plus grande, c'est que les goûts sont nettement tranchés.

7. Comment éviter le paradoxe de Condorcet

On a déjà dit que le système majoritaire peut produire "l'effet Condorcet". On observera que trois personnes suffisent pour obtenir un effet Condorcet mais qu'il y faut au moins trois questions.

Pour un système de vote $(A, \mathcal{E})$, la condition **C1** assure la cohérence de la décision collective au niveau d'une seule question posée, d'un seul choix binaire. La condition **C2**, jointe à **C1**, assure cette cohérence collective au niveau de deux questions posées. Mais que faut-il ajouter afin d'assurer la cohérence au niveau de trois questions (ou davantage), *i.e.,* comment éviter le paradoxe de Condorcet ?

La réponse est simple : il faut et il suffit que l'intersection de deux coalitions efficaces quelconques soit elle-même efficace.

8. Lemme [Guilbaud]

Pour qu'un système de vote $(A, \mathcal{E})$ (satisfaisant les conditions **C1** *et* **C2***) évite l'effet Condorcet, il faut et il suffit qu'il possède également la propriété suivante :*

C3 L'intersection $K \cap L$ de deux coalitions efficaces K et L quelconques est également efficace.

En effet, si la coalition $H = K \cap L$ n'était pas efficace, on se retrouverait dans une situation bien connue en théorie des jeux. On pourrait imaginer une suite de trois questions p, q, r telles qu'une réponse positive aux deux premières implique une réponse positive à la troisième et imaginer que l'on ait $p^+ = K$, $q^+ = L$ et $r^- = H$. Trois questions du genre suivant :

p : Voulez-vous que le gros lot revienne à un membre de la coalition K ?

q : Voulez-vous que le gros lot revienne à un membre de la coalition L ?

r : Voulez-vous que le gros lot revienne à un membre de la coalition H ?

L'assemblée déciderait ainsi, avec la coalition K, que le gros lot doit revenir à l'un des membres de K ; elle déciderait, de même, avec la coalition L, que ce gros lot doit revenir à l'un des membres de L ; elle déciderait enfin, avec la coalition H^c, que le gros lot ne doit pas revenir à un membre de H !

Si, réciproquement, la condition **C3** est satisfaite, aucune décision incohérente n'est possible puisqu'il y aura toujours au moins un membre de cette assemblée qui appartiendra à toutes les coalitions ayant imposé ces décisions et qui les aura donc toutes entérinées (cet individu étant, par hypothèse, logique avec lui-même). $\square$

Hélas ! Cette dernière démonstration le laisse pressentir, le remède conduit au mal...

9. Théorème de Guilbaud

Tout système de vote satisfaisant à la fois les conditions **C1***,* **C2** *et* **C3** *est dictatorial.*

En effet, soit M l'intersection de toutes les coalitions efficaces. En vertu de **C3**, et par récurrence, la coalition M est efficace. C'est donc la plus petite des coalitions efficaces ! □

10. L'impasse et l'issue

Nous sommes dans l'impasse, choisir entre l'effet Condorcet et la dictature. Pour en sortir, on pourrait élaborer, et on l'a fait, toutes sortes de systèmes moins "rudimentaires" que ceux que nous décrivons. Mais le théorème de Guilbaud présente un certain caractère de robustesse. Il s'applique aussi à ces systèmes beaucoup plus complexes de prises de décisions.

En 1951, Kenneth Arrow [1] fait connaître son résultat, souvent cité, sur l'impossibilité pour un système non dictatorial de concilier un certain nombre de conditions (naturelles) de cohérence. Arrow établit un théorème général. Le théorème de Guilbaud en est un cas particulier, un cas **exemplaire**.

{Le théorème d'Arrow dit que l'unique système destiné à prendre des décisions collectives et remplissant une liste de conditions "naturelles" assez larges de compatibilité et de cohérence [trop longues à énumérer ici] est le système dictatorial. On vérifie, minutieusement, que les conditions **C1**, **C2** et **C3** impliquent, une à une, chacune des conditions de la liste d'Arrow. Il en résulte que le théorème de Guilbaud est un cas particulier de celui d'Arrow.}

Effet Condorcet ou dictature, en un mot, la difficulté est telle qu'il ne suffira, sans doute, pas de souffler dessus pour la faire tomber. Aussi n'était-ce pas notre propos en esquissant ainsi le parcours entre Condorcet et Arrow.

Le nœud est solide. Il mérite mieux qu'une attention amusée. Y concourent, tout à la fois, la politique bien entendu ! mais également la sociologie, la psychologie, l'économie ... et les mathématiques !

Que faire ? contre le théorème d'Arrow. Ah ! Nous allions presque oublier de dire que le résultat suppose que l'assemblée A est **finie** !

11. Les ultrafiltres

Ceux qui savent auront déjà reconnu dans l'ensemble des trois conditions (**C1**, **C2**, **C3**) l'une des nombreuses définitions équivalentes des ultrafiltres.

Une des autres définitions possibles, et qui est particulièrement adaptée en la circonstance, est la suivante.

Un ultrafiltre sur un ensemble A est un ensemble non vide $\mathcal{U}$ de parties non vides de A qui possède les deux propriétés que voici.

Pour toutes parties K et L de A, on a

U1 $K \cap L \in \mathcal{U}$ si et seulement si $K \in \mathcal{U}$ et $L \in \mathcal{U}$,

U2 $K \cup L \in \mathcal{U}$ si et seulement si $K \in \mathcal{U}$ ou $L \in \mathcal{U}$.

On notera, dans ces deux énoncés, le rapprochement de l'opération "intersection" et de la conjonction "et", d'une part, et celui de l'opération "réunion" et de la disjonction "ou", d'autre part, ce qui ne devrait pas surprendre outre mesure !

On vérifie sans peine que l'ensemble de ces deux conditions (**U1**, **U2**) est équivalent à l'ensemble des trois conditions (**C1**, **C2**, **C3**). Autrement dit, un système de vote $(A, \mathcal{E})$ satisfait les conditions **C1**, **C2**, **C3**, si et seulement si l'ensemble des coalitions efficaces $\mathcal{E}$ est un ultrafiltre sur l'ensemble A.

Nous voici revenu à notre préoccupation et cela procure encore un habit aux ultrafiltres. Les ultrafiltres considérés comme systèmes de vote assurant la cohérence des décisions, autrement dit, systèmes de vote évitant l'effet Condorcet.

À chaque élément x de l'ensemble A correspond l'ultrafiltre $\mathcal{U}_x$ formé des parties de A auxquelles l'élément x appartient. Ce sont les ultrafiltres **triviaux** sur A. Ils correspondent aux systèmes de vote dictatoriaux.

Le théorème de Guilbaud traduit simplement le fait bien connu suivant : sur un ensemble fini, tout ultrafiltre est trivial.

Cependant, sur un ensemble infini, il existe toujours un ultrafiltre non trivial au moins, pourvu que l'on dispose de l'axiome du choix ou, du moins, d'un axiome supplémentaire (convenable) ajouté à la théorie classique ZF de Zermelo–Fraenkel.

"La vérité en mathématiques ne se décide pas à coups de vote." On entend souvent cette phrase lancée, au cours de vives discussions, au moment où le débat se met à produire ses arguments les plus spécieux.

Eh bien ! essayons tout de même. Autrement dit, considérons un système de vote $(I, \mathcal{U})$ où I est un ensemble quelconque et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I.

12. Ultrapuissances

Considérons également un ensemble X quelconque et demandons à chacun des individus i de l'assemblée I de choisir un élément x_i de l'ensemble X. On obtient ainsi une famille $x = (x_i)_{i \in I} = (x_i)$ d'éléments de X indexés par I qui constitue, en quelque sorte, la collection des choix individuels des membres de l'assemblée. Mais quel est alors le choix collectif de l'assemblée (suivant le système de vote défini par l'ultrafiltre $\mathcal{U}$) ?

S'il existe un élément e bien déterminé de X pour lequel une coalition efficace a opté, on n'hésitera pas à dire que cet élément représente le choix collectif de l'assemblée puisque le vote le désigne comme l'élu. Autrement dit, si l'ensemble $\{i \in I \colon x_i = e\}$ appartient à l'ultrafiltre $\mathcal{U}$, il est légitime de dire que $x \equiv e$ (modulo $\mathcal{U}$).

Plus généralement, si l'assemblée procède à deux choix consécutifs, $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$, on dira que ces deux choix sont les mêmes lorsqu'il y a une coalition efficace pour en juger ainsi, autrement dit, lorsque la coalition $\{i \in I : x_i = y_i\}$ appartient à $\mathcal{U}$. On dira alors que $x \equiv y$ (modulo $\mathcal{U}$). C'est une relation d'équivalence sur le produit cartésien X^I.

On aura reconnu sans détour la notion d'**ultrapuissance**. En effet, l'ensemble ainsi défini de tous les “choix collectifs” de l'assemblée n'est autre que l'ultrapuissance $X^{\mathcal{U}}$ de l'ensemble X suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$, *i.e.*, le quotient du produit cartésien X^I par la relation d'équivalence.

C'est une construction mathématique qui se laisse métaphoriquement interpréter comme fruit des travaux d'une assemblée votant suivant un ultrafiltre donné.

J'ai déjà eu l'occasion de développer cette *métaphore* ailleurs (Luminy 1985, *voir* Condorcet et les ultrafiltres, *loc. cit.*)

On associe généralement le nom de Łoś et la date de 1955, voire 1949, à la notion d'ultrapuissance [12], [11].

Notons, en passant, qu'il n'aura échappé à personne que cette notion est, si je puis dire, en germe dans la notion… de **germe de fonction** bien connue des géomètres et des analystes.

{On dit que deux fonctions $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ sont *équivalentes* modulo un filtre donné $\mathcal{F}$ sur X lorsqu'il existe une partie $E \in \mathcal{F}$ sur laquelle f et g coïncident. Les germes de fonctions suivant le filtre $\mathcal{F}$ sont, par définition, les classes d'équivalence modulo ce filtre.}

Qu'arrive-t-il cependant si, pour une collection donnée $x = (x_i)$ de choix individuels, il n'existe aucun élément e bien déterminé de X pour lequel on ait $x \equiv e$ (modulo $\mathcal{U}$) ? Et cela risque fatalement de se produire lorsque l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ n'est pas trivial et que l'ensemble X est infini. Eh bien ! on dira simplement que x (modulo $\mathcal{U}$) est le choix collectif de l'assemblée. On aura ainsi créé un objet irréel *ad hoc*, le prix à payer pour éviter, à la fois, la dictature et l'incohérence.

Bourbaki utilise une construction toute semblable dans le livre IV de ses “Structures fondamentales de l'analyse” consacré aux “Fonctions d'une variable réelle”. Il s'en sert pour définir les “échelles de comparaison”.

Dans une note au bas de la page 57 du chapitre 5, dans l'édition de 1951, (note apparemment disparue de la dernière édition “grise”), Bourbaki précise au sujet de sa construction :

“Ce calcul sur des classes d'équivalence de fonctions ‘égales localement’ joue un rôle important dans plusieurs théories qui seront développées dans ce traité, notamment dans la théorie des variétés différentiables.”

Un rôle important ! Croyait-il si bien dire ? Le développement de Bourbaki culmine en un Appendice sur les corps de Hardy [2] lesquels, on s'en apercevra plus tard, sont une première esquisse des infinitésimaux rénovés.

Première esquisse, car elle ne comporte pas les remarques essentielles au sujet de la **pérennité des énoncés du premier ordre** qui font le *sel des ultraproduits.*

13. Ultraproduits

Plus généralement encore, si chaque individu i choisit un ensemble X_i quelconque, pour commencer, puis borne ses choix aux éléments de cet ensemble, les choix collectifs sont représentés (modulo $\mathcal{U}$) par les familles $(x_i)_{i\in I}$ indexées par I où x_i est un élément de l'ensemble X_i pour chacun des individus i de I.

Ce n'est rien d'autre que l'**ultraproduit** de la famille d'ensembles (X_i) suivant $\mathcal{U}$. [Bien entendu, toute ultrapuissance est un cas particulier d'ultraproduit.]

Par ses votes, l'assemblée pourra ainsi s'occuper de toutes sortes d'objets mathématiques et former des ultraproduits de groupes, de corps, d'espaces de Banach, de fonctions analytiques, que sais-je encore ...

Parmi les choix collectifs de l'assemblée, il y aura ceux qui sont classiques, "réels", et ceux qui sont fictifs, "des façons de parler" (afin de taire les dissensions !). Mais, avec ces façons de parler, on pourra justement discourir et essayer de dire le vrai et le faux.

Pour savoir si une proposition est vraie ou fausse, on fera voter l'assemblée suivant le système $\mathcal{U}$. Et cela réussit au-delà de toute espérance.

14. Le langage

Sans entrer dans les détails, disons que ceux qui pratiquent la "logique mathématique" ont développé, mis au point, et se servent de langages "formels" avec de nombreux symboles et des syntaxes très strictes afin de se mettre à l'abri de toutes les contestations passées et à venir.

Le mathématicien pourrait fort bien se passer de toute cette complexité. Il lui suffirait de savoir que ces langages existent et d'en connaître les rudiments. Ne point reculer devant cette "barrière artificielle", aller de l'avant en sachant éviter "les faux-pas", ne pas se laisser impressionner ou rebuter par des mots compliqués qui recouvrent des notions simples, cela est possible et même souhaitable si l'on ne veut pas se perdre dans les méandres et les sables mouvants du magnifique paysage mathématique.

Pour être précis, les propositions que l'on soumettra à l'assemblée sont énoncées, exprimées, à l'aide du langage dit "du premier ordre avec égalité" ainsi que du prédicat binaire d'appartenance d'une théorie des ensembles.

Pour s'adresser à l'assemblée, il suffit d'utiliser la négation, **"non"**, la disjonction, **"ou"**, l'expression **"il existe"**, la relation d'égalité, **"="**, et la relation d'appartenance, "$\in$" [au total, deux connecteurs, un quantificateur et deux prédicats binaires spécifiques]. On en fera dériver tous les autres connecteurs et quantificateurs, notamment la conjonction **"et"**, l'implication, le quantificateur **"pour tout"**, de la manière la plus simple, habituelle.

Ainsi, par exemple, "p et q" veut dire "non ((non p) ou (non q))".

De même, "pour tout x, $p(x)$" veut dire "non (il existe x, (non $p(x)$))".

L'assemblée comprendra parfaitement bien quand on lui dit "pour tout x, x n'appartient pas à X" que le X dont il s'agit est un ensemble vide !

15. La vérité selon $\mathcal{U}$

Soit $P(x,\dots,y)$ un énoncé du langage convenu soumis à l'assemblée où $x = (x_i),\dots,y = (y_i)$ représentent des choix de l'assemblée. Désignons par $V(P; x,\dots,y)$, ou plus simplement $V(P)$ lorsque toute confusion est minime, la coalition des individus qui estiment que cet énoncé est satisfaisant "de leur point de vue".

Autrement dit, posons $V(P) = V(P; x,\dots,y) = \{i \in I\colon P(x_i,\dots,y_i)$ est vrai$\}$. Cette coalition peut être efficace ou inefficace, autrement dit appartenir ou non à l'ultrafiltre $\mathcal{U}$. Si elle est efficace, on dira que $P(x,\dots,y)$ est vrai selon $\mathcal{U}$. Dans le cas contraire, on dira que $P(x,\dots,y)$ est faux selon $\mathcal{U}$.

Pour la proposition $P(x,y)$ qui s'énoncerait "$x = y$", on aura ainsi $V(P) = \{i \in I\colon x_i = y_i\}$. C'est une coalition familière, déjà rencontrée. Il s'ensuit que les deux expressions suivantes sont synonymes :

(1) $x \equiv y$ (modulo $\mathcal{U}$)

et

(2) la proposition "$x = y$" est vraie selon $\mathcal{U}$.

Elles ont exactement le même sens et, il faut bien le reconnaître, tout a été fait pour cela !

De même, pour la proposition $Q(x,X)$ qui s'énonce "$x \in X$", on a $V(Q) = \{i \in I\colon x_i \in X_i\}$.

Cette proposition $Q(x,X)$ est ainsi vraie selon $\mathcal{U}$ si et seulement si une "majorité", pardon, une coalition efficace d'individus i ont fait le choix $x_i \in X_i$.

Lorsque c'est le cas, on dira encore que $x \in X$ (modulo $\mathcal{U}$).

On vient de donner ainsi un sens précis aux deux prédicats "$=$" et "$\in$", dans le monde fictif des choix collectifs, et qui déborde largement le sens habituel. Il ne fait que déborder car il coïncide avec ce sens habituel pour tous les objets réels !

Quel est le rapport entre la vérité selon $\mathcal{U}$ et la vérité dans notre monde fictif ? C'est une seule et même chose. Tel est le résultat essentiel, le plus important.

16. Un lemme fondamental

L'énoncé $P(x, \ldots, y)$ est vrai si et seulement si une coalition efficace en décide ainsi.

Autrement dit, $P(x, \ldots, y)$ est vrai du monde fictif si et seulement si $P(x, \ldots, y)$ est vrai selon $\mathcal{U}$.

Ce lemme mériterait à peine une démonstration tant le langage emporte la conviction ! La démonstration en est très simple et se fait par récurrence "sur la complexité" des énoncés. Ce peut être un excellent exercice. Elle se trouve dans tous les manuels qui traitent des ultraproduits. [On pourra se référer à Condorcet et les ultrafiltres, *loc. cit.*]

Esquisse de la démonstration.

1) Si l'énoncé P ne comporte que l'un ou l'autre des symboles "$=$" ou "$\in$" (mais aucun des symboles logiques) : le résultat découle des définitions, de la signification même de ces deux prédicats dans le monde fictif.

2) Si l'énoncé P est de la forme (non Q) : on suppose le lemme établi pour Q et l'on remarque simplement que V(non Q) et $V(Q)$ sont deux coalitions complémentaires !

3) Si l'énoncé P est de la forme (R ou S) : on suppose, de même, que le lemme est établi pour chacun des deux énoncés R et S puis on remarque que $V(R$ ou $S)$ est la réunion de $V(R)$ et $V(S)$.

4) Enfin, si $P(x, \ldots, y)$ est de la forme "il existe z, $T(z, x, \ldots, y)$", on procède comme suit.

Pour tout choix collectif $c = (c_i)$, la coalition $W = V(P; x, \ldots, y)$ contient $V(T; c, x, \ldots, y)$. En effet, si l'individu i appartient à la coalition $V(T; c, x, \ldots, y)$ c'est que, de son point de vue, l'énoncé $T(c, x, \ldots, y)$ est satisfaisant, autrement dit, l'énoncé "il existe z, $T(z, x_i, \ldots, y_i)$" est vrai, de sorte que l'énoncé $P(x_i, \ldots, y_i)$ est également vrai et donc i appartient aussi à la coalition W.

On suppose alors le lemme établi pour l'énoncé T (et quels que soient les choix qui y interviennent). Puis on raisonne comme suit.

1. L'énoncé $P(x, \ldots, y)$ est vrai si et seulement s'il existe un choix collectif $c = (c_i)$ pour lequel $T(c, x, \ldots, y)$ est vrai, ce qui entraîne que $V(T; c, x, \ldots, y)$ est une coalition efficace de sorte que la coalition $W = V(P; x, \ldots, y)$, qui la contient, est également efficace !

2. Réciproquement, pour chaque i appartenant à W, il existe au moins un choix individuel c_i pour lequel $T(c_i, x_i, \ldots, y_i)$ est vrai. On construit alors un choix collectif c en complétant arbitrairement, par exemple, en prenant $c_i = 0$ pour tout individu i hors de W [on voit bien que ce choix importe peu]. La coalition W est alors contenue dans $V(T; c, x, \ldots, y)$ pour le choix c. Si donc W est

efficace, $V(T; c, x, \ldots, y)$ le sera également ce qui implique (par l'hypothèse de récurrence !) que $T(c, x, \ldots, y)$ est vrai et cela entraîne que l'énoncé "il existe z, $T(z, x, \ldots, y)$" est vrai lequel signifie, justement, que $P(x, \ldots, y)$ est vrai. $\square$

Remarque. – Observons à nouveau la toute dernière partie de la démonstration précédente. Si l'unanimité, ou simplement, une coalition efficace, se satisfait d'un même objet classique, réel, e par exemple, pour approuver l'énoncé $T(e; x, \ldots, y)$, il n'y a guère d'hésitation à le désigner comme choix de la collectivité. Sinon, on créé l'objet nouveau c, fictif, "nonstandard", qui va représenter le choix collectif. Un objet idéal.

Les mathématiciens, depuis longtemps, manient les "idéaux" sous des formes multiples et diverses : idéaux de Kummer, points à l'infini, nombres imaginaires… la liste est inépuisable.

De ce lemme découle immédiatement, comme corollaire, le résultat essentiel suivant sur la pérennité des énoncés.

17. Le théorème de transfert

Un énoncé classique est vrai si et seulement si l'assemblée décide qu'il est vrai.

Appliqué aux énoncés de la forme (non P), ce résultat dit aussi, assurément, qu'un énoncé classique est faux si et seulement si l'assemblée en décide ainsi.

L'écho, revenant, dira : "On peut parfaitement bien décider par vote si un théorème est vrai ou faux. Observez donc ce monde fictif, vu à travers les regards des membres d'une assemblée infinie !"

18. Une assemblée infinie

Une assemblée infinie, cela n'existe pas, dira-t-on. Cela peut, cependant, se créer aisément par un mathématicien.

Imaginons une assemblée infinie dénombrable dont les membres seraient $1, 2, \ldots, n, \ldots$ Faisons voter cette assemblée suivant un ultrafiltre non dictatorial. On a déjà dit qu'il en existait. Le système n'étant pas dictatorial, aucun membre à lui seul ne constitue une coalition efficace. Plus généralement, en vertu de la condition **U2**, aucune coalition finie n'est efficace, de sorte que la coalition opposée (cofinie) l'est toujours. Demandons à l'assemblée de désigner un nombre entier. Imaginons que chaque membre choisisse de voter pour lui-même. Que dire alors de l'élu ? Désignons-le par ω. C'est le choix collectif, l'élu de l'assemblée. C'est un entier puisque l'assemblée, unanime, en est d'accord. Comparons ce choix à l'entier 7 par exemple. Il n'y a guère que les 7 premiers membres de l'assemblée pour dire que leur élu ne dépasse pas 7. Tous les autres, une majorité, est d'accord pour dire que ω dépasse 7. Il en ira de même si l'on compare ω à l'un quelconque des entiers n naturels. Il se trouvera toujours une coalition efficace pour dire que ω dépasse n. Or l'assemblée est souveraine ! Ainsi, par décision de l'assemblée, on peut déclarer que ω est un "entier plus grand que tous les entiers naturels". Il mérite bien le nom "d'entier infiniment grand". L'élu ω est **un entier infini**.

De même, dans un scrutin pour élire un nombre réel, si chaque membre n de l'assemblée porte son choix sur la fraction $1/n$, le choix collectif de l'assemblée tout entière (qui n'est autre alors que $1/\omega$) est un "nombre positif, 'rationnel', plus petit que tout réel positif". C'est donc un nombre infiniment petit (et non nul), autrement dit un **infinitésimal positif**.

Nous voici dans le domaine de la théorie rénovée des infinitésimaux, alias *analyse nonstandard*, dont A. Robinson donne en 1961 les fondements parfaitement rigoureux que l'on n'attendait plus car on avait cessé d'y croire [13]. Cette analyse "nonstandard", portée aux nues à ses débuts pour être tant décriée par la suite, ne méritait sans doute pas tout cet honneur ni cette indignité ! Mais cela est une tout autre histoire...

"Par ses choix et décisions successifs, l'assemblée produit ainsi de nouveaux objets mathématiques, détermine leurs propriétés, arrête leurs relations mutuelles, énonce des théorèmes remarquables dont l'ensemble déborde les mathématiques 'classiques' et, en particulier, contient tous les éléments d'une saine théorie des infinitésimaux." [Élections, ultrafiltres, infinitésimaux ou le paradoxe de Condorcet, *loc. cit.*]

"Par ce biais, et même si à chaque étape on ne réunit pas l'unanimité, on retrouve cette unanimité devant les énoncés portant sur les objets classiques. Ce cheminement 'souterrain' de la pensée est exactement semblable au procédé qui, au travers des quantités imaginaires, ramène à des identités réelles (les formules de Cardan ! les formules de Moivre !). On évoquera sans doute, aussi, la permanence des identités par prolongement analytique, et la monodromie.

Le passage par la fiction n'altère en rien la réalité dès qu'elle réapparaît." [Condorcet et les ultrafiltres, *loc. cit.*]

Non seulement ce procédé n'altère en rien la réalité, mais il l'enrichit considérablement.

"**1785** Condorcet,
1952 Guilbaud,
1937 Cartan,
1951 Arrow,
1955 Łoś,
1951 Bourbaki,
1961 Robinson.

En contemplant ces dates, on se prend à rêver. Un fil rouge semble les relier à travers les années. Il va, il vient, remonte le temps, court et revient, et tisse une trame qui mène du paradoxe de Condorcet aux infinitésimaux. Peut-on s'empêcher d'imaginer que le marquis, inconsciemment ou non, en eut la prémonition, qu'il fit, une nuit, 'ce rêve étrange et pénétrant' ?" [Élections, ultrafiltres … *loc. cit.*]

19. Le deuxième degré

En compliquant, on peut imaginer plusieurs assemblées I_p munies, chacune, d'un système de vote représenté par un ultrafiltre $\mathcal{U}_p$. Chaque assemblée délibère et se détermine indépendamment des autres. Pour dégager une décision commune à toutes ces assemblées, on convient de recourir à un système de vote "de synthèse" défini par un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur l'ensemble P des indices p, c'est-à--dire le grand rassemblement des porte-parole respectifs p de ces assemblées. On procède comme suit : pour une question donnée, la réponse collective de la famille d'assemblées est "oui" lorsque l'ensemble des p pour lesquels l'assemblées I_p a dit "oui" est une coalition efficace de l'assemblée P suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$.

C'est le type même des procédures de vote à deux degrés, rappelant les élections sénatoriales en France.

Simplifions. Un instant de réflexion permet de voir que l'on peut faire l'économie d'un degré dans cette procédure. On considère la réunion I de toutes les assemblées I_p et l'on définit l'ensemble $\mathcal{S}$ des coalitions efficaces de l'assemblée I par la règle suivante : la coalition K est efficace dans I lorsque l'ensemble $\{p \in P : K \cap I_p \in \mathcal{U}_p\}$ appartient à $\mathcal{U}$.

Ce système à un degré est équivalent au système à deux degrés. Cela sous-entend deux choses, en réalité : 1) si un individu i appartient à deux ou plusieurs assemblées I_p différentes, ses choix seraient toujours les mêmes dans chacune de ces assemblées, et 2) les porte-parole se conforment, bien entendu, aux mandats impératifs des assemblées qui les délèguent.

L'ultrafiltre $\mathcal{S}$, défini sur l'ensemble I par ce système de vote, est la somme ultrafiltrée suivant $\mathcal{U}$ de la famille d'ultrafiltres $\mathcal{U}_p$. Cette notion a été introduite explicitement par G. Grimeisen en 1960 dans des questions de topologie générale [GRIMEISEN, G.: *Summation von Filtern und iterierte Grenzprozesse. I*, Math. Ann., **141** (1960) 318–342; et II, *ibid.* **144** (1961) 386–417].

Itérons. Vient alors naturellement l'idée suivante. Une assemblée I, régie par une constitution (ou système de vote) $\mathcal{U}$, créé par ses choix (on l'a vu) tout un monde d'objets fictifs nouveaux (objets mathématiques… ou autres !) Envisageons une seconde assemblée J, régie par un ultrafiltre $\mathcal{V}$, et qui porte son regard sur ce monde nouveau créé par l'assemblée I, ce monde nouveau qui contient déjà le monde réel, bien entendu ! L'idée n'est pas folle. On pensera inévitablement aux juridictions de deuxième instance en France.

Comme ci-dessus, un instant de réflexion, à peine plus long, permet de constater que, là encore, la simplification opère.

Le rôle global de ces deux assemblées peut aisément être dévolu à l'unique assemblée $I \times J$ formée de tous les couples (i,j) avec la règle suivante : une coalition K de $I \times J$ est efficace lorsque la coalition L de tous les individus j de J pour lesquels l'ensemble $K(j) = \{i \in I\colon (i,j) \in K\}$ appartient à $\mathcal{U}$, appartient elle-même à $\mathcal{V}$, autrement dit lorsque

$$L := \big\{j \in J\colon \{i \in I\colon (i,j) \in K\} \in \mathcal{U}\big\} \in \mathcal{V}\,.$$

L'ultrafiltre $\mathcal{W}$ des coalitions efficaces ainsi défini, sur l'ensemble produit $I \times J$, est le produit ordinal de l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ par l'ultrafiltre $\mathcal{V}$; leurs rôles ne sont évidemment pas symétriques. Cette opération, on le sait, on le voit, se ramène à une somme ultrafiltrée, en "décomposant" l'assemblée $I \times J$ en ses sous-assemblées "horizontales" $I_j = \{(i,j)\colon i \in I\}$.

Autrement dit, on fait voter "J fois" l'assemblée I, et tout individu i peut varier ses choix lors de chacun de ses votes, comme il l'entend.

Le monde produit par la superposition des deux assemblées I et J est identique au monde de l'assemblée-produit $I \times J$.

20. Le second ordre et la double ultrapuissance

Très tôt, en utilisant les infinitésimaux, on a senti le besoin d'avoir plusieurs ordres d'infiniment petits et plusieurs ordres d'infiniment grands. Lors de l'introduction de l'analyse nonstandard, à nouveau, s'est manifesté le désir de disposer de ces deux échelles. Plusieurs manières de faire ont alors été proposées. Il me semble qu'il n'y a nul besoin d'aller bien loin, ni de compliquer les choses simples. Pour atteindre le second ordre, la double ultrapuissance suffit. Pour atteindre les ordres supérieurs, on itère et, au lieu de deux assemblées, on en prend autant qu'il faut ! On les fait ensuite voter successivement, "hiérarchiquement", comme il est dit ci-dessus. On disposera ainsi de tous les ordres de grandeur désirés, sans effort, sans modification de la manière de considérer les mondes fictifs [10].

21. Ultralimites

Encore un mot sur ce sujet pour dire ceci. L'utralimite correspond à la superposition d'une suite infinie d'assemblées, superposition "potentielle", non "actuelle". Curieusement, ici, la réduction de la suite à une assemblée unique n'est plus de mise !

22. Condorcet et les ultrafiltres

"On risque peu d'être démenti en pensant que le Marquis de Condorcet ignorait tout des ultrafiltres. De même, il est vraisemblable que Monsieur Henri

Cartan songeait davantage, en les inventant, 'à formuler la notion de limite dans toute sa généralité', qu'à éviter le paradoxe du Marquis.

Condorcet et les ultrafiltres. La rencontre était cependant inévitable. Elle doit moins au hasard qu'à la nécessité !

La métaphore qui en découle permet à tout profane, on l'a vu, d'entrer dans la chapelle du nonstandard sans initiation préalable.

Une métaphore c'est proprement un transport, un transfert de sens. Cela peut mener loin..." [Condorcet et les ultrafiltres, *loc. cit.*]

23. Conclusion provisoire

On a songé à mesurer "la cohésion d'une communauté" en proportions inverses de la distorsion entre fréquences réelles et probabilités théoriques des situations à la Condorcet. À établir une typologie suivant les diverses configurations des coalitions. L'idée de mesurer abstraitement la cohésion d'une collectivité à l'aide de la fréquence des situations à la Condorcet est séduisante. J'ai cependant vu peu de textes la mettant en pratique.

Pour les sociétés humaines, il faudra sans doute apprendre à s'accommoder de l'effet Condorcet. Il est cependant curieux d'en entendre si peu souvent, et si discrètement, parler. On ne peut se défendre, parfois, de l'impression que ceux qui savent se gardent bien d'alerter ceux qui ne savent pas encore.

Le problème de l'intérêt général, ou de l'opinion moyenne, outre ses composantes politiques, sociales, économiques, psychologiques, juridiques, logiques... et sa face mathématique, présente certainement un aspect philosophique. Bien entendu, "cordonnier pas plus haut que la chaussure". Mais on ne peut pas s'empêcher de penser que le paradoxe de Condorcet restera toujours un nœud serré au cœur même de la recherche de l'intérêt général et du bien commun.

La théorie des jeux nous l'enseigne. Deux joueurs complètement informés ont, théoriquement, toujours un lieu de repos où se retrancher. À partir de trois joueurs, aucun repli possible, les parties s'animent, les jeux deviennent dangereux.

On le sait, le cheminement souterrain de la pensée emprunte souvent la métaphore et la métonymie. L'activité consciente aussi.

Sur un fonds commun, nous prélevons nos images propres. À chacun ses préférées. Une multitude de regards posés sur le même objet !

Si l'on peut associer les infinitésimaux à la résolution des conflits, j'y verrai, pour ma part, plus qu'une rencontre fortuite, un enrichissement, si infime soit-il, de notre imaginaire, une petite "gerbe d'images" [l'expression est de Denjoy].

24. Conditions pour un classement cohérent

Ne quittons pas le sujet des systèmes de vote sans aborder une question qui semble avoir beaucoup préoccupé les théoriciens de l'économie à la suite des travaux d'Arrow : trouver des *conditions* pour que l'agrégation de classements individuels cohérents produise un classement collectif cohérent. Il s'agit de *conditions* que l'on doit imposer à un ensemble de classements individuels [un *profil* comme l'on dit parfois] et non pas au système de vote lui-même, bien entendu.

Le **problème** est le suivant.

On se donne une assemblée A devant laquelle un certain nombre de candidats $a, b, c, \ldots$ se présente. Chaque membre de l'assemblée fait son propre classement, mettant ces candidats dans l'ordre de ses préférences, par exemple $a > b > c > \ldots$. On suppose que ces classements sont des ordres totaux stricts [évitant les ex æquo]. L'assemblée procède alors à la comparaison des candidats, deux à deux, par des votes successifs. Il en résulte un classement collectif. La **question** est de trouver des conditions (sur l'ensemble des classements individuels) pour que ce classement collectif soit, lui-même, un ordre total strict, autrement dit, ne comporte pas de cycle.

On remarquera, au passage, que cette question peut être ramenée au cas *réduit* où il n'y a que **trois** candidats. En effet, le classement collectif est un ordre strict si et seulement s'il induit sur chacun des triplets $\{x, y, z\}$ de candidats un ordre total strict. {Une relation binaire sur un ensemble quelconque est une relation d'ordre strict si et seulement si sa restriction à chacun des triplets de cet ensemble est un ordre strict ! Cela est clair.}

Citons le texte récent de Christian Elsholtz et Christian List : *A simple proof of Sen's possibility theorem on majority decisions*, Elemente der Mathematik, **60** (2005) n^o 2, 45–56. En voici le résumé, fait par les auteurs eux-mêmes.

"Condorcet's voting paradox shows that pairwise majority voting may lead to cyclical majority preferences. In a famous paper, Sen (1966) [SEN, A. K.: *A possibility theorem on majority decisions*, Econometrica **34** (1966) 491–499, reprinted in SEN, A. K. (1982) *Choice, Welfare and Measurement*, Oxford, Blackwell] identified a general condition on a profile of individual preference orderings, called triplewise value-restriction, which is sufficient for the avoidance of such cycles. This note aims to make Sen's result easily accessible. We provide an elementary proof of Sen's possibility theorem and a simple reformulation of Sen's condition. We discuss how Sen's condition is logically related to a number of precursors. Finally, we state a necessary and sufficient condition for the avoidance of cycles, and suggest that, although there is still some logical space between that condition and Sen's sufficient condition, Sen's condition cannot be further generalized in an appealing way".

D'après Elsholtz et List, il semblerait que la condition (suffisante) de Sen soit ce que l'on ait trouvé de mieux jusqu'ici. Souligons bien la dernière phrase : " ... *we state a necessary and sufficient condition for the avoidance of cycles, and suggest that, although there is still some logical space between that condition and Sen's sufficient condition, Sen's condition cannot be further generalized in an appealing way*". Tout cela se passe dans le domaine classique du système de vote majoritaire.

On va voir comment on peut améliorer sensiblement ces résultats, les rendre parfaitement clairs et lisibles, en se plaçant dans le cadre plus général des systèmes de vote généralisés, et comment on peut obtenir une condition à la fois **nécessaire et suffisante**, tout à fait *attrayante* et *séduisante*.

Rappelons d'abord, en quelques mots, ce qu'est la "triple value-restriction" de Sen. Il s'agit de la condition suivante :

(SEN) Quel que soit le triplet $\{x, y, z\}$ de candidats, il existe un rang $r \in \{1, 2, 3\}$ tel que l'un de ces candidats $t \in \{x, y, z\}$ ne soit classé au rang r par aucun des votants.

25. Le cadre

On considère un système de vote $(A, \mathcal{E})$ pour une assemblée A où l'ensemble $\mathcal{E}$ des coalitions efficaces satisfait les conditions **C1** et **C2**. [Bien entendu, comme on l'a déjà dit, le système majoritaire classique remplit ces conditions (pourvu qu'on lui adjoigne une clause, celle d'une *voix prépondérante* par exemple).]

Pour trois candidats quelconques a, b, c, il existe six classements cohérents uniquement. On les étiquète, comme suit, à l'aide des éléments du groupe cyclique d'ordre 6, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

1 $a > b > c$,
2 $a > c > b$,
3 $c > a > b$,
4 $c > b > a$,
5 $b > c > a$,
6 $b > a > c$.

Cet étiquetage présente les particularités suivantes. Les classements p et $p+1$ ont toujours le même candidat au premier rang ou le même au dernier rang. Pour passer de p à $p+1$, on "dérange" le moins possible ces classements, autrement dit, on échange, simplement, le rang des deux premiers ou celui des deux derniers. En un certain sens, les classements p et $p+1$ sont "le plus proche possible". Enfin, les classements p et $p+3$ sont "opposés" l'un de l'autre. On a ainsi, par exemple,

1 $\quad a > b > c$,
4 $\quad a < b < c$.

Donc, en particulier, le même candidat occupe le deuxième rang dans deux classements distincts p et q si et seulement si l'on a $q = p + 3$, autrement dit lorsque les deux classements p et q sont opposés.

Cela dit, on introduit les notations suivantes : on désigne par $K(p)$ la coalition formée des membres de l'assemblée qui ont choisi p comme classement des trois candidats. De même, on désigne par $K(p, q)$ la réunion des coalitions $K(p)$ et $K(q)$ et, par $K(p, q, r)$ la réunion des coalitions $K(p)$, $K(q)$ et $K(r)$.

26. Une solution

On introduit ensuite les trois conditions suivantes.

(S) Il existe un p pour lequel la coalition $K(p,\, p+1)$ ou la coalition $K(p,\, p+3)$ est vide.

(T) Il existe un p pour lequel la coaltion $K(p,\, p+1)$ est efficace.

(V) Il existe un p pour lequel les deux coalitions $K(p,\, p+1,\, p+2)$ et $K(p+1,\, p+2,\, p+3)$ sont efficaces.

(1) La condition (S) est la généralisation naturelle de la condition de Sen car, dans le cas du système majoritaire, cette condition (S) n'est autre que la condition (SEN) ci-dessus.

(2) La condition (T) est conséquence de la condition (S).

En effet, pour voir que (S) implique (T), il suffit de remarquer ceci. Lorsque $K(p,\, p+1)$ est vide, les deux coalitions $K(p+2,\, p+3)$ et $K(p+4,\, p+5)$ sont opposées de sorte que l'une d'elles est efficace. De même, lorsque $K(p,\, p+3)$ est vide, les deux coalitions $K(p+1,\, p+2)$ et $K(p+4,\, p+5)$ sont opposées et l'une d'elles est donc efficace. □

(3) La condition (T) implique la condition (V).

En effet, si la coalition $K(q,\, q+1)$ est efficace, les deux coalitions $K(q-1,\, q,\, q+1)$ et $K(q,\, q+1,\, q+2)$ qui la contiennent sont toutes deux efficaces. Il suffit alors de prendre $p = q - 1$. □

(4) La condition (V) implique que le classement collectif est un ordre total strict.

En effet, on suppose que les deux coalitions $K(p,\, p+1,\, p+2)$ et $K(p+1,\, p+2,\, p+3)$ sont efficaces. Le classement p est de la forme $x > y > z$.

Il n'y a donc que deux cas possibles.

Dans le premier cas, on a

p	$x > y > z$,
$p+1$	$x > z > y$,
$p+2$	$z > x > y$,
$p+3$	$z > y > x$.

La coalition efficace $K(p,\, p+1,\, p+2)$ impose donc la préférence collective $x > y$ et la coalition efficace $K(p+1,\, p+2,\, p+3)$ la préférence collective $z > y$. Quelle que soit alors la préférence collective entre x et z, le classement collectif sera toujours un ordre total strict ! [Ce sera ou bien $p+1$ ou bien $p+2$.]

Dans le second cas, on a

p	$x > y > z$,
$p+1$	$y > x > z$,
$p+2$	$y > z > x$,
$p+3$	$z > y > x$.

Ici, les deux coalitions efficaces $K(p,\, p+1,\, p+2)$ et $K(p+1,\, p+2,\, p+3)$ imposent, respectivement, les préférences collectives $y > z$ et $y > x$ de sorte que le classement collectif est encore un ordre total strict. [Ce sera, de nouveau, ou bien $p+1$ ou bien $p+2$.] □

(5) Une petite surprise, enfin, vient du résulat que voici.

La condition (V) est non seulement suffisante, mais également nécessaire pour que le classement des trois candidats a, b, c soit cohérent.

En effet, supposons que le classement collectif des trois candidats est un ordre total strict. Quitte à changer les noms des candidats, on peut supposer qu'il s'agit du classement $a > b > c$. La coalition des votants pour lesquels $a > b$ est donc efficace : cette coalition n'est autre que $K(1, 2, 3)$. De même, la coalition des votants pour lesquels $a > c$ est efficace et c'est la coalition $K(6, 1, 2)$! de sorte que la condition (V) est bien satisfaite. □

On aura noté que la condition (V) dit, en substance, que les choix individuels doivent être voisins et pas trop "éparpillés", ce qui était prévisible.

(6) La condition nécessaire et suffisante (V) et, plus encore, la condition suffisante (T), présentent un caractère de simplicité certain. Bien entendu, on peut facilement traduire l'une et l'autre, dans le cas du système majoritaire classique, en terme de nombres de votants dans les différentes coalitions. Il faut alors se limiter au cas où les votants sont en nombre impair ou accepter les complications dues à l'une des clauses supplémentaires du

type “voix prépondérante”. {Dans le cas d'un système majoritaire avec un nombre impair de votants, par exemple, la condition (T) s'écrit tout simplement comme ceci : il existe un p pour lequel on a $\left|K(p,\, p+1)\right| > \left|K(p,\, p+1)^c\right|$.}

(7) Nous avons traité, ici, le cas où les classements ne comportent pas d'ex æquo. Le cas général où les classements sont des préordres est susceptible d'un traitement semblable, mais un peu plus complexe, évidemment.

27. Remarques

(1) La question se pose de la place précise de la condition (T) entre les deux conditions (S) et (V). Des exemples simples, dans le cadre du système majoritaire lui-même, permettent de voir que (T) n'est équivalente ni à (S) ni à (V).

En effet, pour montrer que la condition (T) n'implique pas (S), on envisage la situation suivante : 5 votants dont 3 optent pour le classement 1, les deux autres choisissant, respectivement, les classement 3 et 5, autrement dit $|K(1)| = 3$, $|K(3)| = |K(5)| = 1$ et $K(2) = K(4) = K(6) = \emptyset$. Ainsi, aucune des coalitions $K(p,\, p+1)$ et $K(p,\, p+3)$ n'est vide, tandis que la coalition $K(1,2)$, par exemple, est majoritaire. La condition (T) est donc satisfaite sans que (S) le soit. □

Pour montrer que la condition (V) n'implique pas (T), on examine la situation suivante : 5 votants qui optent, respectivement, pour les 5 premiers classements 1, 2, 3, 4, 5, aucun votant ne choisissant le classement 6, autrement dit chacune des coalitions $K(1)$, $K(2)$, $K(3)$, $K(4)$ et $K(5)$ est constituée d'un unique votant tandis que $K(6)$ est vide. Ainsi, chacune des coalitions $K(p,\, p+1)$ renferme au plus 2 votants de sorte qu'aucune d'elles n'est majoritaire. Cependant, les coalitions $K(1,2,3)$ et $K(2,3,4)$ renferment, chacune, 3 votants et sont donc toutes deux majoritaires. Cela veut dire que la condition (V) est satisfaite sans que la condition (T) le soit. □

(2) Puisque (T) implique (V) laquelle implique l'absence d'incohérence, cette condition (T) implique, *a fortiori*, la cohérence du classement collectif.

Voici une démonstration qui établit cela directement et prouve donc, également et de manière particulièrement simple, que la condition (S) de “Sen” est suffisante pour assurer la cohérence du choix collectif.

En effet, si une coalition $K(p,\, p+1)$ est efficace, elle dictera le choix du candidat au premier rang ou au dernier rang, selon le cas, et le classement des deux autres candidats ne pourra pas introduire d'incohérence. [Ainsi, par exemple, si $K(1,2)$ est efficace, la préférence collective sera $a > b$ **et**

$a > c$. Il importe peu, ensuite, que l'on ait $b > c$ **ou** $c > b$, le classement collectif sera toujours un ordre strict.] ☐

28. L'ultrafiltre : un conciliateur

De la cacophonie qui peut naître lorsque chacun des membres de l'assemblée infinie $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ donne son avis, l'utrafiltre $\mathcal{U}$ tire un son unique qui harmonise toutes ces opinions, si diverses et variées.

Il peut avoir également un rôle semblable en analyse classique, comme on va le voir dans un instant. On prendra aussi le temps de faire quelques rappels.

29. L'ultrafiltre : un modérateur

Le comportement d'une suite réelle qui ne converge pas peut être assez erratique, très chaotique, on le sait.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ des entiers naturels. Chaque suite réelle $x = (x_n)$ possède une limite, $\lim\limits_{\mathcal{U}} x$, suivant cet ultrafiltre. {Rappelons ceci : la limite d'une suite réelle $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivant un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ est l'unique élément r de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que, pour chaque voisinage V de r, il existe un $X \in \mathcal{U}$ pour lequel $\{x_n : n \in X\} \subset V$. La notion de limite suivant un ultrafiltre est classique. On la trouve dans tous les manuels de topologie.} Cette limite est un nombre réel lorsque la restriction de la suite x à l'une des parties $K \in \mathcal{U}$ est bornée. Sinon, cette limite est égale à $+\infty$ ou $-\infty$ selon les cas. Imaginons l'assemblée $\mathbb{N}$ munie du système de vote régi par l'ultrafiltre $\mathcal{U}$. Soit e l'élu correspondant au choix collectif $x = (x_n)$. Du point de vue de l'assemblée, cet élu e est "un nombre réel", disons *hyperréel* pour éviter la confusion. Lorsque la limite $\lim\limits_{\mathcal{U}} x$ est finie égale à r, l'élu, le nombre hyperréel e, est **infiniment proche** du nombre réel r dans le sens (très précis) que la différence $e - r$ est alors **infinitésimale**. Sinon, l'hyperréel e est un infiniment grand, positif ou négatif suivant les cas. Ainsi, en particulier, tout hyperréel *fini* est infiniment proche d'un nombre réel qui en est l' *ombre* dans le monde réel, en quelque sorte. L'ombre d'un hyperréel infiniment grand étant, bien entendu, par définition, $\pm\infty$ suivant qu'il est positif ou négatif.

[Dans ce contexte, et pour autant que je sache, c'est H. Jerome Keisler qui a introduit le mot *hyperréel*. Quant au mot *ombre*, tellement approprié, je sais que c'est à Georges Reeb qu'on le doit.]

L'ultrafiltre *modère* ainsi le comportement des suites et permet d'attacher à chaque objet du monde fictif ["hyperréel"] qu'il créé, un objet *infiniment proche* dans le monde réel [son "ombre"].

Notons encore ceci. La fonction $f_{\mathcal{U}}$ définie par $f_{\mathcal{U}}(x) = \lim\limits_{\mathcal{U}} x$ est une forme linéaire positive sur l'espace $B(\mathbb{N})$ des suites réelles bornées.

30. Les limites généralisées de Banach

On se souvient que Stefan B a n a c h a introduit une notion de limite généralisée dans son livre célèbre : Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932, quelques années avant l'introduction de la notion d'ultrafiltre. Il s'exprime en particulier ainsi (p. 34) :

"À toute suite bornée $\{\xi_n\}$ on peut faire correspondre un nombre $\mathrm{Lim}_{n\to\infty}\xi_n$ de façon que les conditions suivantes (...) soient remplies."

Ces conditions que doit remplir l'opération Lim, définie sur l'espace $B(\mathbb{N})$, sont celles-ci (exprimées dans le langage d'aujourd'hui) : Lim est une forme linéaire, positive, telle que $\mathrm{Lim}_{n\to\infty}\xi_{n+1} = \mathrm{Lim}_{n\to\infty}\xi_n$ et $\mathrm{Lim}_{n\to\infty}1 = 1$.

{Les opérations Lim qui remplissent ces conditions ont été baptisées "limites généralisées de Banach".}

Bien entendu, Banach établit l'existence de ces opérations à l'aide de son théorème sur "l'extension des fonctionnelles linéaires" majorées par une "semi-norme", comme on dirait de nos jours.

Auparavant, René B a i r e avait introduit les notions de limites supérieure et inférieure d'une suite réelle qui satisfont les inégalités suivantes :

$$\inf_n(x_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \sup_n(x_n)\,.$$

Bien évidemment, toute forme linéaire *positive* f définie sur l'espace $B(\mathbb{N})$ vérifie, pour chaque suite réelle $x = (x_n)$, les inégalités

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant f(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n\,.$$

Elle est donc, en particulier, continue pour la norme $||x|| = \sup\limits_n |x_n|$, comme on le sait.

La condition $\mathrm{Lim}_{n\to\infty}\xi_{n+1} = \mathrm{Lim}_{n\to\infty}\xi_n$ dit que l'opération Lim est invariante par les *décalages* des suites, ce qui revient à dire que l'on peut supprimer un nombre fini quelconque de termes d'une suite sans changer la valeur de sa limite généralisée.

Quant à la condition de *normalisation* $\mathrm{Lim}_{n\to\infty}1 = 1$, elle n'a rien d'essentiel sinon d'exclure la forme nulle. En effet, étant donnée une forme linéaire positive f quelconque, *non nulle*, définie sur l'espace $B(\mathbb{N})$, invariante par les décalages, la fonction $g(x) = f(x)/f(1)$ est une limite généralisée de Banach.

Faisons encore un pas. Soit f une forme linéaire positive quelconque, définie sur l'espace $B(\mathbb{N})$ et pour laquelle $f(1) = 1$. Pour chaque suite réelle bornée $x = (x_n)$, posons d'abord $t_n = (1/n) \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$ puis $t = (t_n)$ et $g(x) = f(t)$. La fonction g ainsi définie est alors une limite généralisée de Banach. {C'est un exercice simple de vérifier que g possède bien les propriétés requises.}

Autrement dit, l'accent peut être mis sur l'ensemble de toutes les formes linéaires positives sur l'espace $B(\mathbb{N})$.

Cela dit, reprenons un ultrafiltre non trivial $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ et, pour chaque suite $x \in B(\mathbb{N})$, posons $t_n = (1/n) \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k$ puis $t = (t_n)$ et enfin $g(x) = f_{\mathcal{U}}(t) = \lim_{\mathcal{U}}(t)$. La fonction g est une limite généralisée de Banach !

31. Les espaces d'ultrafiltres

Donnons-nous un ensemble E quelconque et désignons par $\Upsilon(E)$ l'ensemble de tous les ultrafiltres sur E. [Il faut lire "upsilon" de E.] Nous savons déjà que chaque point $x \in E$ définit un ultrafiltre trivial $\mathcal{U}_x$ sur E. On a ainsi une injection $x \mapsto \mathcal{U}_x$ de l'ensemble E dans l'ensemble $\Upsilon(E)$. Cette injection permet d'identifier l'ensemble E au sous-ensemble de $\Upsilon(E)$ formé des ultrafiltres triviaux. Cette identification, point par point, est sans danger, sauf cas exceptionnels.

(1) Lorsque l'ensemble E est fini, il n'y a sur E que des ultrafiltres triviaux et l'on aura donc $\Upsilon(E) = E$.

(2) Lorsque l'ensemble E est infini et que l'on se place dans une théorie des ensembles avec axiome du choix, nous savons déjà qu'il y a sur E des ultrafiltres non triviaux et l'on sait démontrer qu'il y en a *vraiment beaucoup*. Plus précisément, lorsque $\mathrm{card}(E) = \alpha$ est infini, on a $\mathrm{card}\big(\Upsilon(E)\big) = 2^{2^\alpha}$.

(3) On sait aussi qu'il existe des *modèles* de théories des ensembles dans lesquels il y a des ensembles infinis, mais point d'ultafiltres non triviaux (assurément, des théories sans axiome du choix). Autrement dit, dans ces modèles, on aura toujours $\Upsilon(E) = E$ quel que soit l'ensemble E.

(4) À chaque partie $F \subset E$ est également associé l'ensemble $\Upsilon(F)$ des ultrafiltres sur F et chaque ultrafiltre $\mathcal{V}$ sur F est la trace d'un unique ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur E de sorte que l'on peut, en identifiant $\mathcal{V}$ à $\mathcal{U}$, identifier également, sans danger, $\Upsilon(F)$ à la partie correspondante de $\Upsilon(E)$.

(5) Cela dit, l'ensemble $\{\Upsilon(F) \colon F \subset E\}$ est une base d'ouverts pour une topologie sur l'ensemble $\Upsilon(E)$. Cette topologie **canonique** fait de l'ensemble $\Upsilon(E)$ un espace compact, l'**espace de Stone** des ultrafiltres sur E. On désigne assez couramment cet espace par la notation βE. Cet espace est, on le démontre, le **compactifié de Stone-Čech** de E considéré comme espace discret. {Il y a bien des manières de construire des compactifiés. La méthode qui consiste à utiliser les ultrafiltres est l'une des plus naturelles. Elle est bien connue. On verra ci-dessous comment βE est le spectre premier de l'anneau $\mathcal{P}(E)$.}

(6) Revenons un peu en arrière [voir le **19**] pour considérer une famille d'ultrafiltres $(\mathcal{U}_p)_{p\in P}$ sur un ensemble I et un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur l'ensemble P des indices. La somme ultrafiltrée [de Grimeisen] suivant $\mathcal{U}$ de la famille $(\mathcal{U}_p)_{p\in P}$ apparaît comme la limite, dans l'espace compact de Stone βI, de cette famille d'ultrafiltres suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$, simplement.

(7) Les espaces d'ultrafiltres jouent un rôle **considérable** en topologie générale. Ils tiennent une place importante dans la plupart des traités. [B o u r b a k i, cependant, les a relégués dans ses exercices qui forment, il est vrai, une part non négligeable de son traité.] On sait ainsi, par exemple, que les compactifications d'un espace complètement régulier E sont, toutes, des quotients de l'espace compact de Stone βE.

(8) L'espace de Stone βE possède également une autre interprétation. Il se présente comme le **spectre premier** de l'anneau de Boole $\mathcal{P}(E)$ des parties de l'ensemble E. En effet, les idéaux premiers de cet anneau de Boole, qui coïncident avec les idéaux maximaux, sont en correspondance bijective avec les ultrafiltres sur E. Plus précisément, soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de l'anneau de Boole des parties de E. L'ensemble

$$\mathcal{U} = \{K : K \subset E \text{ et } (E \setminus K) \in \mathcal{M}\}$$

est un ultrafiltre sur E et, bien entendu, on a la relation *duale*

$$\mathcal{M} = \{K : K \subset E \text{ et } (E \setminus K) \in \mathcal{U}\}.$$

Toutes ces choses, et bien d'autres encore, sont classiques et bien connues.

Disons quelques mots d'un usage un peu méconnu des espaces d'ultrafiltres et qu'il est peut-être intéressant de connaître, tout de même.

32. Les nasses

Soit E un espace topologique quelconque dont l'ensemble des ouverts est $\mathcal{O}$. On lui associe un graphe T dans l'ensemble produit $\Upsilon(E)\times\Upsilon(E)$ de la manière suivante :

$$(\mathcal{U},\mathcal{V}) \in T \iff \mathcal{U}\cap\mathcal{O} \subset \mathcal{V}.$$

On donne à T le nom de **nasse** de l'espace topologique E [7].

Le graphe T représente ainsi une relation binaire entre les ultrafiltres sur E et, comme il est d'usage, pour dire que l'on a $(\mathcal{U},\mathcal{V}) \in T$, on écrira, indifféremment,

$$\mathcal{U}\ T\ \mathcal{V} \quad \text{ou} \quad \mathcal{V}\ \overset{-1}{T}\ \mathcal{U} \quad \text{ou} \quad \mathcal{V}\in T(\mathcal{U}) \quad \text{ou} \quad \mathcal{U}\in \overset{-1}{T}(\mathcal{V}),$$

où $\overset{-1}{T}$ est la relation opposée, la relation inverse.

On vérifie, sans aucun détour, que la relation T est réflexive et transitive, autrement dit, on a toujours

$$\mathcal{U}\,T\,\mathcal{U}$$

et

$$\mathcal{U}\,T\,\mathcal{V} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}\,T\,\mathcal{W} \Longrightarrow \mathcal{U}\,T\,\mathcal{W}.$$

{Tout simplement, en partant des définitions et en prenant le chemin direct, on voit que la relation T est reflexive puisque $\mathcal{U} \cap \mathcal{O} \subset \mathcal{U}$. D'autre part, $\mathcal{U} \cap \mathcal{O} \subset \mathcal{V}$ et $\mathcal{V} \cap \mathcal{O} \subset \mathcal{W}$ impliquent évidemment $\mathcal{U} \cap \mathcal{O} \subset \mathcal{W}$ d'où il appert que T est transitive.}

Cette nasse T est donc un **préordre** sur l'ensemble $\Upsilon(E)$ des ultrafiltres. Elle renferme **toutes** les informations sur la topologie de l'espace E et ramène ainsi, en un certain sens, l'étude des topologies à celle des préordres.

Lorsque l'on munit l'ensemble des ultrafiltres $\Upsilon(E)$ de sa topologie canonique, autrement dit si l'on utilise l'espace de Stone βE, on s'aperçoit que la nasse T est une partie *fermée* de l'espace produit $\beta E \times \beta E$. Elle possède, de plus, la particularité suivante : l'image réciproque par T de toute partie ouverte de βE est encore une partie ouverte de βE. Autrement dit

$$\mathcal{A} \text{ ouvert de } \beta E \Longrightarrow \overset{-1}{T}(\mathcal{A}) \text{ ouvert de } \beta E,$$

comme pour une application continue. Les relations binaires qui miment ainsi les fonctions continues, Choquet leur a donné le nom de relations **mi-ouvertes**. La nasse T est ainsi **un préordre fermé et mi-ouvert sur l'espace de Stone** βE.

Ce qui est remarquable c'est que cela *caractérise* les nasses de topologies, en ce sens que tout **préordre fermé et mi-ouvert sur l'espace de Stone** βE est la nasse d'une topologie sur l'ensemble E. Il y a correspondance bijective entre l'ensemble des topologies sur E et l'ensemble des préordres fermés et mi-ouverts sur βE.

Plus généralement, une nasse est définie comme étant une relation réflexive et fermée sur un espace βE. D'autre part, on dit qu'une relation binaire R est *idempotente* lorsque l'on a $RR = \overset{2}{R} = R$. Ainsi, les nasses de topologies sont-elles donc précisément les nasses **idempotentes** et **mi-ouvertes**.

"On supprime l'idempotence et on retombe en substance sur les prétopologies de Choquet. On retranche encore la condition mi-ouverte et on retrouve les ordres topogènes de Császár. On ajoute la condition de symétrie et on obtient une représentation utile des proximités." [Voir "Quelques points de topologie générale. Théorie de nasses et des tramails", *loc. cit.*]

Les nasses couvrent ainsi un large spectre de structures topologiques classiques et de leurs généralisations les plus connues. En se reportant au texte cité, on pourra trouver un traitement (assez) complet de ces questions. Pour en donner un tout petit avant-goût, on ajoutera encore ceci.

Étant donnés un espace topologique E et sa nasse T, la condition nécessaire et suffisante pour que l'espace satisfasse la condition de **normalité** est que l'on ait $T\overset{-1}{T} \subset \overset{-1}{T}T$. De même, l'espace E est **extrêmement discontinu** si et seulement si on a $\overset{-1}{T}T \subset T\overset{-1}{T}$.

Ouvrons une dernière parenthèse dans ce paragraphe pour dire ceci. Appliquée au cas des ensembles finis, l'introduction des nasses montre, en particulier, que les topologies sur un ensemble fini sont en correspondance bijective avec ses préordres. Ce fait, assez simple, semble avoir été *redécouvert* très souvent, des chercheurs, le rencontrant pour la première fois, pouvaient penser, légitimement, être les premiers à l'avoir observé. On peut dire, dans un certain sens, que la théorie des nasses est une extension de ce fait simple aux structures topologiques plus complexes.

33. Choquet et les ultrafiltres

Avant de terminer, je tiens encore, particulièrement, à parler de l'usage assez remarquable que Choquet a fait des ultrafiltres dans ses travaux. Hélas ! je n'aurais pas le temps [ni, surtout, les compétences] suffisants pour en donner une vue d'ensemble satisfaisante. Aussi, vais-je me contenter d'un aperçu qui portera sur un seul des nombreux points saillants de l'ensemble impressionnant des emplois qu'il en a fait. Ce dont je vais parler est une toute petite partie d'un texte très dense, et indispensable : [4].

On le sait, Gustave Choquet est un élève d' Arnaud Denjoy qui a rédigé les superbes leçons de René Baire au Collège de France [Leçons sur les fonctions discontinues, Gauthier-Villars, Paris, 1905]. Entre les trois, la filiation est certaine et un historien des mathématiques, un jour, sûrement, se donnera la peine d'en dégager les thèmes et les épisodes essentiels pour les fixer par l'écrit, la tradition orale pourra ainsi perdurer.

On se fixe un espace topologique quelconque E. On se donne une famille $\mathcal{X} = (X_i)_{i\in I}$ de parties quelconques de E indexées par un ensemble I, ainsi qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur I. On introduit alors les notions de limites supérieure et inférieure de la famille $\mathcal{X}$ suivant le filtre $\mathcal{F}$ [l'inspiration, on le voit, vient de loin] comme suit.

On commence par associer au filtre $\mathcal{F}$ sa **grille**

$$\mathcal{G} = \left\{Y : Y \subset E \;\; X \cap Y \neq \emptyset \text{ pour tout } X \in \mathcal{F}\right\}.$$

On désigne par $\Upsilon\langle\mathcal{F}\rangle$ l'ensemble de tous les ultrafiltres sur I plus fins que $\mathcal{F}$. Bien entendu, le filtre $\mathcal{F}$ est **l'intersection** de tous les ultrafiltres plus fins que lui d'où l'on déduit, aisément, que sa grille $\mathcal{G}$ est **la réunion** de ces ultrafiltres,

$\mathcal{G} = \bigcup_{\mathcal{U} \in \Upsilon(\mathcal{F})} \mathcal{U}$. On observera au passage, que la grille $\mathcal{G}$ est égale au filtre $\mathcal{F}$ si et seulement si ce dernier est un ultrafiltre !

Pour chaque partie $J \subset I$, soit $X_J = \bigcup_{i \in J} X_i$. On désigne par $\overline{X_J}$ l'adhérence de X_J puis on pose

$$\liminf_{\mathcal{F}} \mathcal{X} = \bigcap_{J \in \mathcal{G}} \overline{X_J}\,,$$

$$\limsup_{\mathcal{F}} \mathcal{X} = \bigcap_{J \in \mathcal{F}} \overline{X_J}\,.$$

(1) La limite inférieure est plus petite, comme il se doit, que la limite supérieure :

$$\liminf_{\mathcal{F}} \mathcal{X} \subset \limsup_{\mathcal{F}} \mathcal{X}\,,$$

elle lui est égale lorsque $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, mais ce n'est bien sûr pas le seul cas. Lorsque ces deux limites sont égales, on désignera par $\lim_{\mathcal{F}} \mathcal{X}$ cette valeur commune et on dira que la famille $\mathcal{X}$ possède une **limite suivant le filtre** $\mathcal{F}$. En particulier, toute famille $(X_i)_{i \in I}$ possède toujours une limite suivant chacun des ultrafiltres sur I, quel qu'il soit. On observera, plus généralement, que pour tous filtres $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ sur I, on a les inclusions

$$\liminf_{\mathcal{F}} \mathcal{X} \subset \liminf_{\mathcal{F}'} \mathcal{X} \subset \limsup_{\mathcal{F}'} \mathcal{X} \subset \limsup_{\mathcal{F}} \mathcal{X}\,.$$

(2) Par nature, les limites inférieure et supérieure sont des parties fermées de l'espace E et leurs valeurs ne changent pas lorsqu'on remplace la famille $\mathcal{X}$ des parties X_i par la famille $\overline{\mathcal{X}} = (\overline{X_i})_{i \in I}$ des adhérences de ces X_i. Pour cette raison, on peut se limiter au cas des seules familles de parties fermées de E.

(3) On désigne par $\Phi(E)$ l'ensemble de tous les fermés de l'espace E. On dispose ainsi d'une notion de limite dans l'ensemble $\Phi(E)$. Plus précisément, on considère la famille $\mathcal{X} = (X_X)_{X \in \Phi(E)}$ dont l'ensemble des indices est $I = \Phi(E)$ et où chaque fermé X est son propre indice. Étant donné un filtre quelconque $\mathcal{F}$ sur l'ensemble $\Phi(E)$, ses limites supérieure et inférieure sont, par définition, celles de cette famille et on pose simplement

$$\liminf \mathcal{F} = \liminf_{\mathcal{F}} \mathcal{X}\,,$$

$$\limsup \mathcal{F} = \limsup_{\mathcal{F}} \mathcal{X}\,,$$

et, lorsque ces deux limites sont égales,

$$\lim \mathcal{F} = \lim_{\mathcal{F}} \mathcal{X}\,.$$

Cela fait-il de $\Phi(E)$ un espace topologique ? Autrement dit, cette limite peut-elle être *redéfinie* à l'aide d'une topologie convenable sur l'ensemble $\Phi(E)$?

(4) En particulier, tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ **sur** $\Phi(E)$ possède une limite dans $\Phi(E)$. Pour que les limites des filtres sur $\Phi(E)$ ainsi définies *proviennent* d'une topologie sur E, il faut déjà qu'elles satisfassent la condition suivante :

$$\lim \mathcal{F} = F \iff \lim \mathcal{U} = F \text{ pour tout ultrafiltre } \mathcal{U} \supset \mathcal{F}.$$

Autrement dit, il faut au moins que ces limites définissent une **pseudotopologie** au sens de Choquet sur l'ensemble $\Phi(E)$. On peut établir que c'est bien le cas en montrant, plus généralement, ceci.

(5) On se donne une famille quelconque $\mathcal{X} = (X_i)_{i\in I}$ de parties de E indexées par un ensemble I et un filtre $\mathcal{F}$ sur I. On a alors [voir Convergences, *loc. cit.*, page 64]

$$\liminf_{\mathcal{F}} \mathcal{X} = \bigcap_{\mathcal{U}\in\Upsilon\langle\mathcal{F}\rangle} \lim_{\mathcal{U}} \mathcal{X},$$

$$\limsup_{\mathcal{F}} \mathcal{X} = \bigcup_{\mathcal{U}\in\Upsilon\langle\mathcal{F}\rangle} \lim_{\mathcal{U}} \mathcal{X}.$$

Le fait que la grille $\mathcal{G}$ soit égale à la réunion $\bigcup_{\mathcal{U}\in\Upsilon(\mathcal{F})} \mathcal{U}$ permet d'établir la première formule sans grand détour. Quant à la seconde, pour l'établir, il peut être commode d'observer ceci qui présente un intérêt en soi.

Une famille $\mathcal{X} = (X_i)_{i\in I}$ étant fixée, pour chaque point $x \in E$ et chaque partie $V \subset E$, on pose

$$I(x,V) = \{i \colon i \in I,\ V\cap X_i \neq \emptyset\},$$

puis

$$\mathcal{I}(x) = \{I(x,V) \colon V \text{ voisinage de } x \text{ dans } E\}$$

On vérifie alors, simplement, que l'on a

$$I(x, U\cap V) \subset I(x,U)\cap I(x,V) \text{ pour toutes parties } U \text{ et } V \text{ de } E,$$

(ce qui prouve que $\mathcal{I}(x)$ est une base de filtre sur I pourvu que l'on ait $\emptyset \notin \mathcal{I}(x)$) puis on établit, un peu moins simplement, les deux caractérisations suivantes :

$$x \in \liminf_{\mathcal{F}} \mathcal{X} \iff \mathcal{I}(x) \subset \mathcal{F},$$

$$x \in \limsup_{\mathcal{F}} \mathcal{X} \iff \mathcal{I}(x) \subset \mathcal{G}.$$

{La dualité suivante lie un filtre $\mathcal{F}$ et sa grille $\mathcal{G}$: $(X \in \mathcal{G}) \Longleftrightarrow (X$ coupe tout $Y \in \mathcal{F})$; de même, $(X \in \mathcal{F}) \Longleftrightarrow (X$ coupe tout $Y \in \mathcal{G})$. En partant des définitions, on procède alors par équivalences, comme suit : $(x \in \liminf_{\mathcal{F}} \mathcal{X}) \Longleftrightarrow$ (pour tout $J \in \mathcal{G}$ et tout voisinage V de x, on a $J \cap I(x,V) \neq \emptyset) \Longleftrightarrow$ (pour chaque voisinage V de x, on a $I(x,V) \in \mathcal{F})$ $\Longleftrightarrow (\mathcal{I}(x) \subset \mathcal{F})$, ce qui établit la première caractérisation. On fait de même pour la seconde.}

Cela devrait suffire pour établir la seconde formule.

{On s'appuie sur le fait classique suivant : un filtre est contenu dans la grille $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ si et seulement s'il est contenu dans l'un des ultrafiltres $\mathcal{U} \in \Upsilon\langle\mathcal{F}\rangle$.

On a ainsi $(x \in \limsup_{\mathcal{F}} \mathcal{X}) \Longleftrightarrow (\mathcal{I}(x) \subset \mathcal{G}) \Longleftrightarrow$ (il existe $\mathcal{U} \in \Upsilon\langle\mathcal{F}\rangle$ tel que $\mathcal{I}(x) \subset \mathcal{U}) \Longleftrightarrow (x \in \bigcup_{\mathcal{U} \in \Upsilon\langle\mathcal{F}\rangle} \lim_{\mathcal{U}} \mathcal{X})$.}

(6) La pseudo-topologie ainsi définie sur $\Phi(E)$ n'est pas toujours une topologie, ni même une prétopologie, comme des exemples le montrent [voir Convergences, *loc. cit.*, page 87]. Lorsque l'espace E est **séparé**, cas particulier très important, (en anglais on dit "Hausdorff space"), non seulement les singletons $\{x\}$ sont fermés dans E, de sorte que E s'identifie à une partie de $\Phi(E)$ par injection, mais encore la pseudo-topologie induite sur E coïncide avec la topologie initialement donnée sur E. De plus on a alors les résultats remarquables que voici.

(7) Lorsque l'espace E est séparé, la pseudo-topologie de $\Phi(E)$ est une prétopologie si et seulement si E est **localement compact**. De plus, lorsqu'il en est ainsi, cette prétopologie est elle-même une topologie. Le sous-espace $\Phi_0(E) = \Phi(E) \setminus \{\emptyset\}$ est alors localement compact et $\Phi(E)$ en est le compactifié d'Alexandroff. En particulier, lorsque E est **compact**, l'espace $\Phi_0(E)$ est compact, c'est l'espace des parties compactes *non vides* de E.

(8) Une fois forgé, Choquet utilise cet outil pour "l'étude des relations multivoques entre deux espaces topologiques" qu'il conclut par une étude magistrale des "rapports entre la convergence et la convergence uniforme locale, ou plus précisément entre les **contingents** et les **paratingents** abstraits... " aboutissant à des énoncés simples qui "sont la généralisation et la géométrisation des résultats de Baire et des théorèmes mis par M. Denjoy à la base de la théorie des fonctions de variable réelle" [*loc. cit.*].

(9) Sans entrer dans les détails, mais afin de donner un tout petit peu de la saveur à ces résultats, on ajoutera encore ceci.

On se donne un espace métrique U, un espace métrique compact Δ, deux parties $P \subset E \subset U$ et une application $\delta\colon (P \times E) \setminus (P \times P) \to \Delta$ continue par rapport à son premier argument (pour chaque valeur fixée du second). En tout point $x \in P$, on définit le contingent $c(x)$ de E en x ainsi que le paratingent $p(x)$ de E en x relativement à P, associés à la fonction δ [c'est là qu'il serait long de rentrer dans les détails]. Choquet établit le résultat suivant. {Nous respectons son orthographe.}

Théorème. – Pour tout point x de P, sauf aux points x d'un F_σ maigre de P, le paratingent p varie continuement et $c(x) = p(x)$.

C'est la généralisation [extrême] du résultat classique de Baire sur l'ensemble des points de continuité de la limite simple d'une suite de fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0{,}1]$!

(10) Inutile de rappeler que les espaces de fermés $\Phi(E)$, et leurs sous-espaces, abondent, notamment en analyse et en géométrie. Chacun est muni de sa pseudo-topologie canonique, souvent plus fine que la topologie associée et donc plus *regardante* sur les limites. Il y a les espaces de courbes, de variétés, de plans continus... Il y a le sous-espace $\kappa(E)$ [lire "kappa" de E] des compacts d'un espace séparé E, sous-espace de l'espace $\Phi(E)$ de ses fermés. Rappelons encore ceci. Parmi ces espaces de fermés, il faut compter aussi de nombreux espaces de fonctions : le graphe de toute fonction définie sur un espace topologique E à valeur dans un espace séparé F appartient à l'espace $\Phi(E \times F)$ puisqu'il est fermé dans l'espace produit.

34. En guise de point d'orgue

Revenons à nos assemblées. Reprenons une assemblée I dont le système de vote est régi par un ultrafiltre $\mathcal{U}$. Donnons-nous une famille $\mathcal{X} = (X_i)_{i \in I}$ de parties d'un espace topologique E. L'assemblée transforme cette famille $\mathcal{X}$ en un choix collectif dont le représentant est un objet M du monde fictif. De son point de vue, l'assemblée considère M comme "une partie de E", "une partie fermée" si les X_i sont fermés, et **l'ombre** de M dans le monde réel n'est rien autre que $\lim_{\mathcal{U}} \mathcal{X}$, en un sens très précis. **Mais cela est une autre histoire !**

Épilogue

§1 Le paradoxe du Marquis de Condorcet

On va essayer de jeter un regard nouveau sur les deux premiers exemples de Condorcet.

1. Sur le premier exemple de Condorcet

Imaginons une élection où 60 votants doivent choisir l'un des 3 candidats, A, B, C. Un premier tour donne le résultat suivant :

A 23 voix,
B 19 voix,
C 18 voix.

Si l'élection a lieu *à l'anglaise* [*i.e.*, un seul tour, et à la majorité relative], le candidat A, qui recueille le plus de voix, est élu.

Si l'élection est *à la française* [*i.e.*, à la manière de la "présidentielle" française], on retient les deux candidats arrivés en tête, A et B, pour un second tour afin de les départager. Ce sont donc les partisans du candidat C qui, répartissant leurs voix, décident du scrutin. [On sous-entend, bien sûr, que les votants ne changent pas d'avis et ne s'abstiennent pas]. Supposons que les partisans de C se répartissent comme suit

$$18 \quad C > \begin{cases} B > A & 16\,, \\ A > B & 2\,, \end{cases}$$

autrement dit, sur les 18 partisans de C, il en est 16 qui préfèrent B à A, les 2 autres préférant A à B. C'est alors B qui est élu par $19 + 16 = 35$ voix $/60$.

Enfin, on peut décider, *à la Condorcet*, de comparer les candidats deux à deux. Supposons que la situation d'ensemble soit [représentée schématiquement] la suivante :

$$23 \quad A > \begin{cases} C > B & 23\,, \\ B > C & 0\,, \end{cases}$$

$$19 \quad B > \begin{cases} C > A & 19\,, \\ A > C & 0\,, \end{cases}$$

$$18 \quad C > \begin{cases} B > A & 16\,, \\ A > B & 2\,. \end{cases}$$

En comparant les candidats deux à deux, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} B > A &\ \text{ par } \ 19 + 16 = 35 \ \text{ voix} / 60\,, \\ C > B &\ \text{ par } \ 18 + 23 = 41 \ \text{ voix} / 60\,, \\ C > A &\ \text{ par } \ 18 + 19 = 37 \ \text{ voix} / 60\,. \end{aligned}$$

Les électeurs marquent ainsi leurs préférences pour B plutôt que A, C plutôt que B et C plutôt que A, chaque fois à la majorité absolue, ce qui donne le classement $C > B > A$ et fait de C l'élu.

On constate sur cet exemple que, suivant le mode de scrutin choisi, l'élu est A, B ou C respectivement. Cela indique une nette **sensibilité** du résultat au mode de scrutin.

Mais il y a bien plus, comme le montre l'exemple suivant de Condorcet.

2. Le second exemple de Condorcet

Imaginons, toujours avec 3 candidats A, B, C, et 60 votants, la situation représentée schématiquement comme ceci :

$$\begin{aligned} 23 \quad A > &\begin{cases} B > C & 23\,, \\ C > B & 0\,, \end{cases} \\ 19 \quad B > &\begin{cases} C > A & 17\,, \\ A > C & 2\,, \end{cases} \\ 18 \quad C > &\begin{cases} B > A & 8\,, \\ A > B & 10\,. \end{cases} \end{aligned}$$

En comparant les candidats deux à deux, on obtient cette fois les résultats suivants :

$$\begin{aligned} A > B &\ \text{ par } \ 23 + 10 = 33 \ \text{ voix} / 60\,, \\ B > C &\ \text{ par } \ 19 + 23 = 42 \ \text{ voix} / 60\,, \\ C > A &\ \text{ par } \ 18 + 17 = 35 \ \text{ voix} / 60\,, \end{aligned}$$

ce qui constitue un classement *circulaire* [incohérent] $A > B > C > A$.

3. Commentaires

(1) Insistons encore sur le fait que le classement ainsi obtenu est *circulaire*, incohérent.

(2) **Alliances et coalitions.** Dans l'élection à deux tours, à la française, A et B sont retenus à l'issue du premier tour. Au second tour, A est élu par 33 voix / 60.

On peut supposer que chacun des électeurs est averti de la situation, qu'il connaît les préférences marquées par tous les autres [comme dans une sorte de **jeu** à information complète] et qu'il est capable d'analyser les conséquences de tous les votes, compte tenu de "la règle du jeu". Voici ce qui pourrait advenir.

Parmi les 19 partisans de B, il y en a 17 pour qui C est préférable à A. Ils seraient tentés de voter pour C au premier tour afin de le faire élire d'emblée par 18 + 17 = 35 voix / 60.

Sachant cela, les partisans de A qui préfèrent tous B à C seraient tentés de proposer alliance aux partisans de B pour le faire élire dès le premier tour par 19 + 23 = 42 voix / 60.

Mais, parmi les 18 partisans de C, il y en a 10 qui préfèrent encore A à B et qui pourraient songer à faire alliance avec les partisans de A pour le faire élire au premier tour par 23 + 10 = 33 voix / 60.

Voyant cela, les 17 partisans de B qui préfèrent encore C à A proposeraient de joindre leurs voix à celles des 18 partisans de C le faisant ainsi élire au premier tour par 18 + 17 = 35 voix / 60.

Cette ronde, n'ayant aucune raison de s'arrêter là, pourrait se poursuivre encore longtemps !

Tout cela est possible car il y a une coalition majoritaire, comprenant 35 votants qui préfèrent C à A, capable de le faire élire dès le premier tour. De même, il y a une coalition majoritaire, forte de 33 votants qui préfèrent A à B, capable de le faire élire au premier tour. Enfin, une coalition majoritaire de 42 votants qui préfèrent B à C, prêts à élire B au premier tout.

Comment s'achèverait cette ronde dans la vie réelle, en pratique ? En l'absence de toute donnée supplémentaire, nul ne peut le prévoir ni prédire le comportement des 60 votants. Cela n'étonnera sûrement aucun lecteur du livre de John von Neumann et Oskar Morgenstern, Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, Princeton, 1953.

(3) Je développai cet exemple, un jour, devant de jeunes étudiants, futurs philosophes, qui suivaient mon cours d'**"Initiation aux mathématiques"**, en leur première année d'Université. Voulant connaître leurs réactions, je leur ai demandé ce qu'ils feraient eux-mêmes en la circonstance. Je n'étais que modérément surpris d'entendre plusieurs me répondre qu'ils voteraient pour leur premier choix au premier tour, quoi qu'il advienne, et que tout autre comportement relevait de la "magouille". Je tentais, un peu vainement, je le savais, de leur faire sentir une différence entre *la magouille* et *un compromis*, faisant ressortir, entre autre, aux éventuels partisans de B qu'il serait dommage de

ne pas améliorer leurs affaires en s'alliant à des partisans de C qui aimeraient encore mieux voir B élu que A !... Peine perdue...

J'avais déjà rencontré une certaine forme d'incompréhension chez de nombreux adultes découvrant pour la première fois le paradoxe de Condorcet. Une sorte de "stupeur", suivie d'"incrédulité" débouchant sur une "dénégation" stérile...

Voulant pousser plus loin afin d'en avoir *le cœur un peu plus net*, j'ai soumis un autre exemple, plus frappant, si je puis dire, à mes étudiants.

4. Le Conseil des Sages

Dans une contrée lointaine, indéterminée, et en des temps anciens, la vie de cette Cité était gérée par un Conseil des Sages qui tenait en ses mains les trois pouvoirs : exécutif, législatif et judiciaire. Il avait instauré la loi suivante, à une majorité des deux tiers :

p Tout assassin sera puni.

[On peut entendre : tout assassin sera exécuté, mais ce temps est révolu.]

À quelque temps de là, il avait à juger Untel soupçonné d'être un assassin. Réuni en tribunal, il écoute attentivement les arguments de l'accusateur puis ceux du défenseur. Il délibère, longuement, et décide, à une majorité des deux tiers :

q Untel est coupable.

Au moment de rendre la sentence, à la surprise générale, il décide, à une majorité des deux tiers :

r Untel ne sera pas puni.

Comment cela se peut-il ? Il suffit de se reporter à une miniature des situations à la Condorcet. Un tiers du Conseil a voté pour p, pour q et contre r, tout a fait logiquement. Un tiers a voté pour p, contre q et pour r, en toute cohérence. Le dernier tiers avait voté contre p, pour q et pour r. D'où le résultat **paradoxal** !

Mes jeunes auditeurs supportaient mal (cela se voyait) l'idée que la règle démocratique de la majorité puisse conduire (parfois) à de telles incohérences, à des aberrations où ceux-la mêmes qui votaient une loi, à la majorité, pouvait la violer, à la majorité. Leur désarroi les conduisaient naturellement à refuser que cela puisse être inéluctable et ils cherchaient activement des solutions à cette situation paradoxale. Bien entendu, parmi ces solutions, il y avait celle où il suffisait de réviser la loi votée, l'abroger. Mais si aucun Sage ne changeait d'avis, aucune abrogation ne serait possible puisque le vote se reproduirait, à l'identique ! L'un d'eux finit par proposer une solution un peu plus " élaborée". Lorsque l'on se trouve devant trois questions telles que les réponses à deux quelconques d'entre elles impliquent, logiquement, la réponse à la troisième, il suffisait de n'en poser que DEUX sur les trois ! Cela éviterait les contradictions et *dissoudrait* le paradoxe. Je lui ai fait observer qu'il demeurait une question *subsidiaire* à trancher : comment choisir LA question, parmi les trois, que l'on doit écarter ? Doit-on, ou peut-on, tenir compte de l'ordre chronologique ? par exemple, ou recourir à un autre procédé ? qui resterait à définir.

5. Un apologue

Un Conseil municipal discute de l'opportunité de construire une école communale et de l'endroit où il conviendrait de la construire, éventuellement, sachant qu'il n'y a que deux terrains disponibles, U et V. Pour faire court, disons que le Conseil doit répondre aux trois questions suivantes :

p Doit-on construire une école ?

q Doit-on construire une école sur le terrain U ?

r Doit-on construire une école sur le terrain V ?

Après une longue délibération, le Conseil répond **oui** à la question p, à la majorité. Puis, sur sa lancée, il répond **non** à la question q, à la majorité. Le Maire déclare que l'école sera donc construite sur le terrain V. Un conseiller demande que l'on mette aux voix la question r, ce qui met en joie l'assemblée. Il insiste. On pose la question r et, surprise, le Conseil répond **non** à la question r, à la majorité. Nous savons déjà comment cela est possible si le Conseil est divisé en trois groupes équivalents, H, K, L, le point de vue de chacun étant résumé dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll} H & p^+ & q^+ & r^-, \\ K & p^+ & q^- & r^+, \\ L & p^- & q^- & r^-. \end{array}$$

Ainsi, après avoir posé la question p, selon que l'on pose ensuite la question q ou la question r, on pourra croire (de bonne foi) ou soutenir (de mauvaise foi) que la décision est acquise pour le terrain V ou le terrain U.

L'ordre dans lequel on poserait les questions, si l'on décidait de s'arrêter aux deux premières, conduirait à trois décisions radicalement différentes, selon les cas. Ainsi, en commençant par les questions p et q, le Conseil serait amené à décider de construire une école sur le terrain V. S'il abordait d'abord les questions p et r, il serait conduit à faire construire une école sur le terrain U. Enfin, si l'on mettait aux voix les questions q et r, la décision serait de ne pas construire d'école du tout. On ose à peine imaginer le profit que pourrait tirer un Maire peu scrupuleux, propriétaire du terrain V, en mettant aux voix les seules questions p et q !

La solution qui consisterait à faire voter le Conseil afin qu'il décide lui-même laquelle des trois questions doit être écartée n'est guère plus satisfaisante.

On aurait à poser les trois questions suivantes :

P Doit-on écarter la question p ?

Q Doit-on écarter la question q ?

R Doit-on écarter la question r ?

On se retrouverait devant le tableau suivant, reflet des intérêts des trois groupes suivi du résultat collectif des votes du Conseil :

H	P^-	Q^-	R^+,
K	P^-	Q^+	R^-,
L	P^+	Q^-	R^-,
C	P^-	Q^-	R^-.

Autrement dit, le Conseil décide que l'on ne peut écarter aucune des trois questions p, q, r. Sauf, bien entendu à essayer, de nouveau, d'écarter l'une des trois questions $P, Q, R\dots$ On voit se dessiner ainsi une régression, de situation à la Condorcet en situation à la Condorcet, une sorte de “descente infinie” qui serait véritablement infinie !

Tous ces exemples ont un côté un peu “schématique”, il est vrai. Cependant, si l'on ne distingue pas toujours les situations *à la Condorcet*, avec cette netteté, dans la vie de tous les jours, c'est sans doute parce que l'on évite souvent de poser “la troisième question” !

6. Une situation réelle

Voici pourtant un exemple “symptomatique”, parmi d'autres, que j'aimerais vous faire connaître.

Un sondage a été réalisé en France, par la Sofres, “du 6 au 10 février 1987 auprès d'un échantillon national représentatif de 1000 personnes”, pour le compte de l'hebdomadaire *Le Point*, au sujet d'une éventuelle réforme réduisant la durée du mandat présidentiel (qui était de 7 ans) à 5 ans.

Voici trois des options présentées :

p Il est souhaitable de faire cette réforme avant l'élection présidentielle de 1988.

q Il est souhaitable de la faire, mais après l'élection présidentielle de 1988.

r Il vaut mieux ne pas faire du tout cette réforme.

Voici les pourcentages obtenus : il y a 10 % de personnes “sans opinion”. Parmi ceux qui ont donné leurs opinions, voici la répartition

39/90 optent pour p,

25/90 optent pour q,

26/90 optent pour r.

Ainsi, 64/90 sont pour la réforme, 51/90 ne veulent pas qu'elle se fasse après l'élection présidentielle et 65/90 ne veulent pas qu'elle se fasse avant !

"Laissons aux chiffres leur propre éloquence" !

Cette réforme finit cependant par se faire, bien plus tard (on comprend pourquoi). C'est le moment d'ajouter ceci : bien entendu, ce que nous avons dit du paradoxe de Condorcet, jusqu'ici, relève de la "synchronie", (de la statique), l'étude " diachronique", (dynamique), est bien plus complexe, à l'évidence (puisqu'il faut tenir compte de l'évolution des préférences et des choix individuels ainsi que d'éventuelles concertations menant à des accords préalables, comme en théorie des jeux).

Une **Société infinie**, régie par un ultafiltre, éviterait facilement tous ces ennuis sans avoir recours à la dictature… pourvu que l'ultrafiltre ne soit pas trivial !

§2 Limites de familles d'ensembles

1. Préliminaires

Il est un cas particulier où les limites supérieure et inférieure (voir le **33** ci-dessus) prennent un caractère plus ensembliste que topologique, c'est celui où l'espace E est muni de sa topologie **discrète**. Dans ce cas, bien entendu, l'ensemble $\Phi(E)$ des parties fermées de E n'est autre que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de toutes les parties de E et les limites dans cet ensemble sont celles d'une topologie puisqu'un espace discret est localement compact. Pour une famille $\mathcal{E} = (E_i)_{i\in I}$ de parties de E et tout filtre $\mathcal{F}$ sur I dont la grille est $\mathcal{G}$, on a, par définition,

$$\liminf_{\mathcal{F}} \mathcal{E} = \bigcap_{J\in\mathcal{G}} \bigcup_{i\in J} E_i \qquad \text{et} \qquad \limsup_{\mathcal{F}} \mathcal{E} = \bigcap_{J\in\mathcal{F}} \bigcup_{i\in J} E_i\,.$$

Lorsque les E_i sont des ensembles *quelconques*, il n'est point besoin de spécifier de quel ensemble E ils sont les sous-ensembles. Les définitions demeurent inchangées, que l'on prenne pour E la réunion de tous ces E_i ou tout autre sur-ensemble.

Insistons un peu sur le point suivant. Dans le cas "ensembliste", les limites supérieure et inférieure peuvent également s'exprimer comme suit :

$$\liminf_{\mathcal{F}} \mathcal{E} = \bigcup_{J\in\mathcal{F}} \bigcap_{i\in J} E_i \qquad \text{et} \qquad \limsup_{\mathcal{F}} \mathcal{E} = \bigcup_{J\in\mathcal{G}} \bigcap_{i\in J} E_i\,.$$

On le voit simplement en introduisant, pour chaque x, comme dans le cas "topologique", l'ensemble $I(x) = \{i \colon i \in I \text{ et } x \in E_i\}$. On vérifie alors que

$$x \in \liminf_{\mathcal{F}} \mathcal{E} \iff I(x) \in \mathcal{F} \iff x \in \bigcup_{J \in \mathcal{F}} \bigcap_{i \in J} E_i ,$$

$$x \in \limsup_{\mathcal{F}} \mathcal{E} \iff I(x) \in \mathcal{G} \iff x \in \bigcup_{J \in \mathcal{G}} \bigcap_{i \in J} E_i .$$

2. Limites de suites d'ensembles

Les limites supérieure et inférieure de **suites** d'ensembles interviennent dans les questions de mesure et de probabilités. Elles représentent, en un certain sens, des "queues" d'événements et généralisent, en cela, les opérations de réunion et d'intersection. Lorsque le filtre $\mathcal{F}$ possède une base *dénombrable*, ces deux limites appartiennent nécessairement à la **tribu** au même titre que les autres parties mesurables.

Soient $\mathcal{E} = (E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles quelconques et $\mathcal{F}$ un filtre sur $\mathbb{N}$. Lorsque cette suite est monotone (croissante ou décroissante), sa limite suivant le filtre de Fréchet [le filtre des parties cofinies de $\mathbb{N}$] existe toujours et c'est, selon le cas, sa réunion ou son intersection. Lorsque le filtre $\mathcal{F}$ possède une base dénombrable $\mathcal{B}$, les limites supérieure et inférieure appartiennent à la tribu engendrée par les ensembles E_n. En effet, pour toute base $\mathcal{B}$ du filtre $\mathcal{F}$, on a

$$\liminf_{\mathcal{F}} \mathcal{E} = \bigcup_{J \in \mathcal{B}} \bigcap_{n \in J} E_n \qquad \text{et} \qquad \limsup_{\mathcal{F}} \mathcal{E} = \bigcap_{J \in \mathcal{B}} \bigcup_{n \in J} E_n .$$

À présent, je voudrais vous donner une illustration de l'usage que l'on peut faire des limites d'ensembles dans un tout autre domaine.

3. Un lemme préparatoire

Soit $\mathcal{E} = (E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles quelconques. Pour chaque couple d'ensembles F et M, on posera $I[F, M] = \{i \colon i \in I \text{ et } F \cap M = F \cap E_i\}$. Soit alors $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I et soit $L = \lim_{\mathcal{U}} \mathcal{E}$.

Lemme. *Pour tout ensemble* **fini** F, *on a* $I[F, L] \in \mathcal{U}$.

En effet, par définition, $i \in I[F, L]$ signifie que, pour chaque $x \in F \cap L$, on a $i \in I(x)$ et, pour chaque $x \notin F \cap L$, on a $i \notin I(x)$. On a donc

$$I[F, L] = \bigcap_{x \in F \cap L} I(x) \ \cap \bigcap_{x \in F \setminus L} I \setminus I(x) .$$

Or $x \in L \iff I(x) \in \mathcal{U}$ et $x \notin L \iff I \setminus I(x) \in \mathcal{U}$. Ainsi, $I[F, L]$ est l'intersection d'un nombre fini de parties appartenant à $\mathcal{U}$ et le résultat en découle. $\square$

4. "Diagonales"

Soient $\mathcal{E} = (E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. Je dirai que l'ensemble D est une **diagonale** de la famille $\mathcal{E}$ lorsque, pour tout ensemble fini F, l'ensemble $I[F,D]$ a le même cardinal que l'ensemble I, *i.e.*, $\big|I[F,D]\big| = |I|$.

En particulier, une diagonale D de la famille $\mathcal{E}$ est ainsi un ensemble dont tout **morceau** fini est un morceau fini de l'un au moins des E_i et, mieux encore, est le même morceau fini d'un nombre $|I|$ de ces ensembles E_i. De manière imagée, on peut dire que D est ainsi **tapissée** de morceaux finis des E_i.

On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur un ensemble I est **uniforme** lorsque toute partie $X \in \mathcal{F}$ a le même cardinal que I, *i.e.*, $|X| = |I|$. Pour cela, il faut et il suffit qu'aucune partie $Y \subset I$ telle que $|Y| < |I|$ n'appartienne à $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{F}_I = \{X : X \subset I \text{ et } |I \setminus X| < |I|\}$. C'est un filtre sur I analogue au filtre de Fréchet sur $\mathbb{N}$ (sauf si I est fini et pas un singleton). {Lorsque I est fini, l'ensemble $\mathcal{F}_I$ n'est jamais un filtre sauf si I est un singleton.} Les ultrafiltres uniformes sur I sont ainsi les ultrafiltres plus fins que le filtre $\mathcal{F}_I$. Lorsque I est infini, les ultrafiltres uniformes sont donc non triviaux. Lorsque I est fini, il n'y a pas d'ultrafiltre uniforme sur I sauf dans le cas banal où I est un singleton. Sur un ensemble dénombrable infini, les ultrafiltres uniformes sont les ultrafiltres non triviaux.

Le lemme préliminaire fournit immédiatement le résultat suivant.

5. Théorème

Pour toute famille d'ensembles $\mathcal{E} = (E_i)_{i\in I}$ et chaque ultrafiltre uniforme $\mathcal{U}$ sur I, la limite $\lim\limits_{\mathcal{U}} \mathcal{E}$ est une diagonale de la famille $\mathcal{E}$.

On peut montrer, réciproquement, que toute diagonale de la famille $\mathcal{E}$ est la limite de cette famille suivant un ultrafiltre uniforme convenable sur I.

Comment peut-on utiliser les diagonales ?

6. Applications

Je prendrai un premier exemple en Théorie des nombres.

Le semigroupe $\mathbb{N}$. Donnons-nous une partie infinie $M \subset \mathbb{N}$ et une famille de parties $\mathcal{B} = (B_m)_{m\in M}$ telles que, pour chaque $m \in M$, on ait $B_m \subset [0,m] \subset B_m + B_m$. Les "arithméticiens additistes" appellent B_m une **base** de l'intervalle $[0,m]$. Nous savons qu'il existe des diagonales de la famille $\mathcal{B}$. Je dis que, pour toute diagonale D de $\mathcal{B}$, on a $D + D = \mathbb{N}$, autrement dit D est une base de $\mathbb{N}$.

En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. On va montrer que l'on a $n \in D + D$. Il existe, par hypothèse, une infinité d'indices $m \in M$ pour lesquels on a $[0,n] \cap D = [0,n] \cap B_m$. En prenant $m \geqslant n$, on aura donc $n \in \big([0,n] \cap B_m\big) + \big([0,n] \cap B_m\big)$ et, a fortiori, $n \in D + D$, comme annoncé. $\square$

On peut cependant faire encore mieux, en l'occurence. Pour chaque partie $A \subset \mathbb{N}$ et chaque entier n, on a coutume de considérer le nombre $r(A,n) = \left|\{(x,y)\colon x \in A,\ y \in A,\ x+y=n\}\right|$ de représentations de l'entier n comme somme de deux entiers de A (tenant compte de l'ordre des termes dans la somme). On pose ensuite $s(A) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} r(A,n)$.

On peut alors compléter le résultat sur la diagonale D de la famille $\mathcal{B}$ comme suit. Lorsque l'on a $s(B_m) \leqslant s$ pour tout $m \in M$, on a également $s(D) \leqslant s$.

En effet, reprenant $n \in \mathbb{N}$ et l'indice $m \geqslant n$ pour lequel $[0,n] \cap D = [0,n] \cap B_m$, on observe que $r(D,n) = r([0,n] \cap D, n) \leqslant r(B_m, n) \leqslant s$ donc $s(D) \leqslant s$, comme annoncé. □

Ce résultat a paru dans un article de G. Grekos, L. Haddad, C. Helou, J. Pihko [*On the Erdös-Turán conjecture*, J. Number Theory **102** (2003), n^{o}2 339–352] avec une démonstration différente. Il prouve l'équivalence entre deux formes d'une conjecture de Erdös-Turán, l'une *locale* (forte), l'autre *globale* (faible), pour ainsi dire. On se reportera à cet article pour plus de détails.

Ce résultat se laisse généraliser aisément comme suit.

Semigroupes spéciaux. Soit S un semigroupe [au sens anglo-saxon] commutatif infini. On suppose qu'il existe un recouvrement $(A_x)_{x\in S}$ **spécial** dans le sens suivant : pour chaque $x \in S$, l'ensemble A_x est une partie finie de S telle que $x \in A_x$ mais $x \notin S + (S \setminus A_x)$ et, de plus, $\left|S \setminus \{y\colon y \in S,\ A_x \subset A_y\}\right| < |S|$. On se fixe une partie $M \subset S$ telle que $|M| = |S|$.

Pour chaque $x \in M$, soit B_x une base de A_x, *i.e.,* $B_x \subset A_x \subset B_x + B_x$. Toute diagonale D de la famille $\mathcal{B} = (B_x)_{x\in M}$ est alors une base de S, *i.e.,* $D + D = S$. Si, de plus, pour chaque $x \in M$, on a $s(B_x) \leqslant s$, on aura également $s(D) \leqslant s$. La démonstration suit les lignes de la précédente.

En effet, soit $x \in S$. Par hypothèse, l'ensemble $\{y \in M\colon A_x \cap D = A_x \cap B_y\}$ a le même cardinal que M qui est également celui de S. Or, on a $\left|S \setminus \{y\colon y \in S,\ A_x \subset A_y\}\right| < |S|$. Il existe donc au moins un $y \in M$ pour lequel, d'une part, $A_x \cap D = A_x \cap B_y$ et, d'autre part, $A_x \subset A_y$. Puisque B_y est une base de A_y, on a $x \in B_y + B_y$ donc $x \in (A_x \cap B_y) + (A_x \cap B_y)$ car $x \notin S + (S \setminus A_x)$. Puisque $A_x \cap D = A_x \cap B_y$, on a $x \in D + D$ et, également, $r(D,x) \leqslant r(B_y, x) \leqslant s(B_y) \leqslant s$. □

Cette notion de diagonale apparaît plus naturellement, d'abord, non au travers des limites d'ensembles, mais par le truchement des choix collectifs d'une assemblée délibérante ou, si l'on veut, sous une "vision nonstandard". Voyons, pour terminer, comment cela s'exprime et se démontre.

7. "La genèse des diagonales"

On part d'une famille $\mathcal{B} = (B_m)_{m \in M}$ où M est une partie infinie de $\mathbb{N}$ et chaque B_m est une base de l'intervalle $[0, m]$. On suppose que $s(B_m) \leqslant s$ pour chaque $m \in M$. En utilisant les notations introduites par A. Robinson pour désigner les objets "hyperréels", on considère la famille ${}^*\mathcal{B} = (B_m)_{m \in^* M}$. L'ensemble M étant infini, il existe au moins un hyperentier $\mu \in^* M \setminus M$. "Par permanence", la partie B_μ est une base de l'intervalle $[0, \mu]$ et l'on a $s(B_\mu) \leqslant s$. Ainsi, pour tout hyperentier $\nu \in [0, \mu]$, on a $\nu \in B_\mu + B_\mu$. Soit $D = B_\mu \cap \mathbb{N}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on aura donc $n \in D + D$, ce qui veut dire que D est une base de $\mathbb{N}$ et, de plus, on a encore $s(D) \leqslant s(B_\mu) \leqslant s$.

À chaque hyperentier $\mu \in^* M \setminus M$ correspond ainsi une partie D qui **est** une diagonale de la famille $\mathcal{B}$! Je trouve que cette manière de voir les choses, qui s'est présentée la première, est assez proche d'une certaine intuition, dans sa simplicité. Chaque B_m étant une base de $[0, m]$, quoi de plus naturel que d'aller voir ce qui se passe pour un entier m **infiniment grand**. Ainsi sont nées les diagonales !

REFERENCES

[1] ARROW, K.: *Social Choice and Individual Values*, John Wiley & Sons, New York, 1963.

[2] BOURBAKI, N.: *Fonctions d'une variable réelle*, FVR V. 36, Appendice sur les corps de Hardy, Diffusion C.C.L.S., Paris, 1976; *Topologie générale* TG I. 43–46, Hermann, Paris, 1971.

[3] CARTAN, H.: *Théorie des filtres*, C. R. Acad. Sc. Paris **205** (1937), 595–598; *Filtres et ultrafiltres*, ibid., 777–779.

[4] CHOQUET, G.: *Convergences*, Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys. (1947–1948), 57–112.

[5] Marquis de CONDORCET, M. J. A. N. C.: *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Imprimerie Royale, Paris, 1785; L'ouvrage a été réédité par reproduction photographique, Chelsea Publishing Company, 1972; Il a également été inséré dans l'ouvrage suivant: *Condorcet, Sur les élections et autres textes.* Corpus des œuvres de philosophie en langue française, Fayard, 1986.

[6] GUILBAUD, G. TH.: *Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation*, Économie appliquée **5** (1952), 501–551; L'article a été repris dans le livre suivant et dont il constitue le chapitre II: *Éléments de la théorie mathématique des jeux*, Monographies de recherches opérationnelles, n^o 9, Collection dirigée par G. Morlat, AFIRO, Dunod, Paris, 1968.

[7] HADDAD, L.: *Une représentation des topologies*, C. R. Acad. Sc. Paris **255** (1962), 2702–2704; *Sur quelques points de topologie générale Théorie des nasses et des tramails*, Ann. Fac. Sci. Univ. Clermont **44** (1970), 3–80.

[8] HADDAD, L.: *Condorcet et les ultrafiltres*, in: Mathématiques finitaires et analyse non-standard; Publ. Math. Univ. Paris VII **31** (1989), 343–360, Texte d'un exposé fait à Luminy en 1985.

[9] HADDAD, L.: *Élections, ultrafiltres, infinitésimaux ou le paradoxe de Condorcet*, in: Condorcet, Mathématicien, Économiste, Philosophe, Homme politique, Colloque international, édition Minerve, Paris, juin 1988, pp. 87–91.

[10] HADDAD, L.: *La double ultrapuissance*, in: Sémin. Anal. Univ. Blaise Pascal (Clermont II) 1987–1988, Université de Clermont-Ferrand II, Clermont-Ferrand, 1990.

[11] ŁOŚ, J.: *O Matrycach Logicznych*, Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, Wrocław, 1949.

[12] ŁOŚ, J.: *Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres*, in: Mathematical interpretation of formal systems, Amsterdam, 1955, pp. 98–113.

[13] ROBINSON, A.: *Non Standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1966.

[14] ELSHOLTZ, CHR.—LIST, CHR.: *A simple proof of Sen's possibility theorem on majority decisions*, Elemente der Mathematik **60** (2005), 45–56.

Received May 30, 2005

120, rue de Charonne
F–75011 Paris
FRANCE

E-mail: labib.haddad.@wanadoo.fr