

JOZEF KRCHO

ZOVŠEOBECNENIE ROVNICE IZALUMKLÍN NA TOPOGRAFICKEJ
PLOCHE A V JEJ SKALÁRNOM POLI

Der Verfasser dieses Beitrages verallgemeinert die Gleichung der Isalumklinen für jede beliebige Zeit. Die Lösung vergleicht er mit den Ergebnissen seiner vorangehenden Arbeiten, hauptsächlich mit der Arbeit [4], in der er das System parametrischer Gleichungen für beliebige Winkelwerte der Reliefsbesonnung und jeden beliebigen Zeitmoment abgeleitet hat. Die numerische Lösung der Gleichungen vergleicht er mit seiner weiteren Arbeit [6], in der er tabellierte numerische Werte der Reliefsorientierung und Reliefsneigung in der Richtung der Kurve der grössten Neigung der Punkte am Relief, die die Isalumklinen bilden, anführt.

Podajme na úvod stručný prehľad problematiky dynamiky oslnenia reliéfu riešenej v minulých prácach vo vzťahu k izoklinám a gradientom spádu na reliéfe, aby sme sa mohli v dnešnom príspevku na ne odvolať a organicky na ne nadviazať. Súčasne poznamenajme, že i v terajších úvahách budú o rozsahu a vlastnostiach skúmaného územia platiť predpoklady stanovené v minulých príspevkoch [2, 3, 4, 5, 6] a zároveň na úvod stručne uveďme predmet dnešnej práce.

V dnešnom príspevku sa budeme zaoberať, na základe už spomenutých podmienok v minulých prácach, spôsobom odvodenia všeobecnej rovnice nulovej izalumklíny podľa B. Šalamona [10], ktorú porovnáme so spôsobom riešenia na autorom uvažovanej jednotke guľovej ploche v skúmanom bode $P(x, y, z)$ na reliéfe [4, 5, 6] a súčasne ukážeme možnosť zostrojenia nulovej izalumklíny čisto grafickou cestou. Ďalej zovšeobecníme rovnicu pre všetky nenulové izalumklíny, t. j. pre $\delta_{LN} \neq 90^\circ$ a teda $\delta_{exp} \neq 0^\circ$, zahrnújúcu však súčasne aj prípad $\delta_{LN} = 90^\circ$, čiže súčasne aj rozhranie svetla a tieňa na reliéfe. Zosumarizujeme však najprv celkovú riešenú problematiku izalumklín, ako aj stanovené podmienky pre riešenie, aby sme mohli potom na ne nadviazať.

V minulom príspevku [4] sme teoreticky odvodili parametrické rovnice izalumklín, t. j. izočiari rovnakého uhla oslnenia reliéfu vo zvolenom časovom okamihu, pre ktorý je smer jednotkového vektora $\mathbf{L}\{x_L, y_L, z_L\}$ konštantný a mení sa iba smer jednotkového vektora normály $\mathbf{N}\{x_N, y_N, z_N\}$ na reliéfe. V nasledujúcom príspevku [5] sme riešili dĺžku oslnenia reliéfu a rozhranie svetla a tieňa na reliéfe ako súčasť nulovej izalumklíny, t. j. $\delta_{exp} = 0^\circ$, $\delta_{LN} = 90^\circ$. V príspevku [6] sme ukázali ako možno hodnoty súradníc jednotkových vektorov normály \mathbf{N} na reliéfe, ktorých počiatočné body tvoria na topografickej ploche izalumklíny, numericky vyjadriť a stabelovať, s tabuľkovými číselnými hodnotami platnými pre akýkoľvek tvar topografickej plochy v uvažovanej zemepisnej šírke φ toho, že by sme poznali konkrétny analytický tvar rovnice uvažovanej plochy. Zároveň sme ukázali, ako možno v skúmanom území zostrojiť v mape veľkej mierky izalumklíny pre ľubovoľnú hodinu a ľubovoľný deň na základe stabelovaných

číselných hodnôt orientácie reliéfu Λ_N a sklonu reliéfu γ_N v smere spádovej krivky za pomoci izoklín [2, 3] a smerových frontov [9].

Vzhľadom na to, že konkrétny analytický tvar rovnice topografickej plochy danej predpisom

$$z = z(x, y), \text{ resp. } F(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

kde pravá strana explicitne vyjadrenej funkcie je konečnou jednoznačnou a aspoň až do druhého rádu spojitou funkciou, nepoznáme, zaviedli sme v [4, 5, 6] do úvah pomocnú jednotkovú guľovú plochu, pomocou ktorej sme potom odvodili sústavu parametrických rovníc izalumkín. Aby sme túto úlohu mohli realizovať, skúmanú časť reliéfu sme v prácach [4, 5, 6] uvažovali vzhľadom na pravouhlú kartézsku súradnicovú sústavu $\langle O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$, pričom rovinu (x, y) sme v zmysle prác [1, 9, 2, 3] považovali za základňu reliéfu. Lubovoľný skúmaný bod $P(x, y, z)$ na vymedzenej časti reliéfu bol zároveň počiatkom O , súr. sústavy $\langle O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$, t. j. $P(x, y, z) \equiv O$, ktorej rovina (X, Y) je paralelná s rovinou základnice reliéfu a s rovinou horizontu H . Vektor \vec{i} tejto roviny smeruje k juhu, vektor \vec{j} na východ a vektor \vec{k} kolmý na rovinu (X, Y) smeruje k zenitu. Rovina (X, Z) je teda totožná s rovinou miestneho poludníka. V tejto súr. sústave $\langle O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ sme zároveň uvažovali jednotkovú guľovú plochu, ktorej stred $S \equiv O$ tejto súr. sústavy. Slničný lúč L sme považovali za nositeľa jednotkového vektora $\vec{L} \{x_L, y_L, z_L\}$, ktorého koncový bod sa nachádzal na jednotkovej guľovej ploche. S uvažovanou jednotkovou guľovou plochou sme stotožnili nebeskú sféru horizontálnej sférickej sústavy, ktorej rovina horizontu $H \equiv (XY)$, takže poloha Slnka udaná koncovým bodom jedn. vektora $\vec{L} \{x_L, y_L, z_L\}$ na nebeskej sfére je jednoznačne určená horizontálnymi sférickými súradnicami A_\circ, h_\circ , kde A_\circ je azimut Slnka a h_\circ je uhlová výška Slnka nad rovinou horizontu H a súčasne pravouhlými súradnicami x_L, y_L, z_L . Odvodené vzťahy vyjadríme aj teraz pomocou súr. vektorov, ktoré sú rovnaké vzhľadom na obe súr. sústavy $\langle O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}' \rangle$ a $\langle O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$.

Spomedzi ostatných vektorov, s ktorými sme pracovali v predošlých príspevkoch, v tomto príspevku budeme uvažovať dva základné jednotkové vektory: jednotkový vektor normálny \mathbf{N} v bode $P(x, y, z)$ topografickej plochy a jednotkový vektor \mathbf{L} . Vzhľadom na $|\mathbf{N}| = 1, |\mathbf{L}| = 1$ smerové kosínusy týchto vektorov budú zároveň aj ich súradnicami, t. j.

$$\mathbf{N} \begin{cases} x_N = \cos \alpha_N \\ y_N = \cos \beta_N \\ z_N = \cos \gamma_N \end{cases} \quad \mathbf{L} \begin{cases} x_L = \cos \alpha_L \\ y_L = \cos \beta_L \\ z_L = \cos \gamma_L \end{cases} \quad (2)$$

Pravouhlé súradnice vektorov vyjadríme zároveň v polárnych súradniciach, pre ktoré vzhľadom na $|\mathbf{N}| = 1, |\mathbf{L}| = 1$ platí

$$\mathbf{N} \begin{cases} \cos \alpha_N = \sin \gamma_N \cos A_N \\ \cos \beta_N = \sin \gamma_N \sin A_N \\ \cos \gamma_N = \cos \gamma_N \end{cases} \quad \mathbf{L} \begin{cases} \cos \alpha_L = \cos h_\circ \cos A_\circ \\ \cos \beta_L = \cos h_\circ \sin A_\circ \\ \cos \gamma_L = \cos \gamma_\circ \end{cases} \quad (2')$$

Prv ako začneme riešiť vlastný problém všeobecnej rovnice nulovej izalumklíny i jej modifikácie pre ostatné nenulové izalumklíny, uveďme do súvisu grad z odvodený zo vzťahov zvislého priemetu plochy (1) do roviny (x, y) , so vzťahmi odvodenými na uvažovanej jednotkovej guľovej ploche, aby sme riešenie mohli vzájomne porovnať. Priemet plochy (1) do roviny (x, y) považujeme za spojité skalárne pole (2) plochy (1). Vzhľadom na to, že sústava výškových čiar na topografickej ploche (1) je určená vzťahom

$$F(x, y) = C, \quad (3)$$

kde C je konštanta, sústava izočiar skalárneho poľa plochy (1) v rovine (x, y) ako priemetu sústavy výškových čiar (3) do tejto roviny je určená vzťahom

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0. \quad (4)$$

a sústava ortogonálnych trajektórií k izočiarom (4) ako vrstevniciam v mape bude daná vzťahom

$$\frac{\partial z}{\partial x} dy - \frac{\partial z}{\partial y} dx = 0. \quad (5)$$

Hodnota derivácie v smere normály v rovine (x, y) ako skalárnom poli plochy (1) bude po zanedbaní nekonečne malých veličín vyššieho rádu určená vzťahom

$$\frac{dz}{dn} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dn}, \quad (6)$$

kde pravú stranu vzťahu môžeme rozpísať ako skalárny súčin dvoch vektorov, t. j.

$$\frac{dz}{dn} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dn} + \frac{dy}{dn} \mathbf{j} \right). \quad (6')$$

Prvý člen skalárneho súčinu na pravej strane vzťahu (6') je vektor

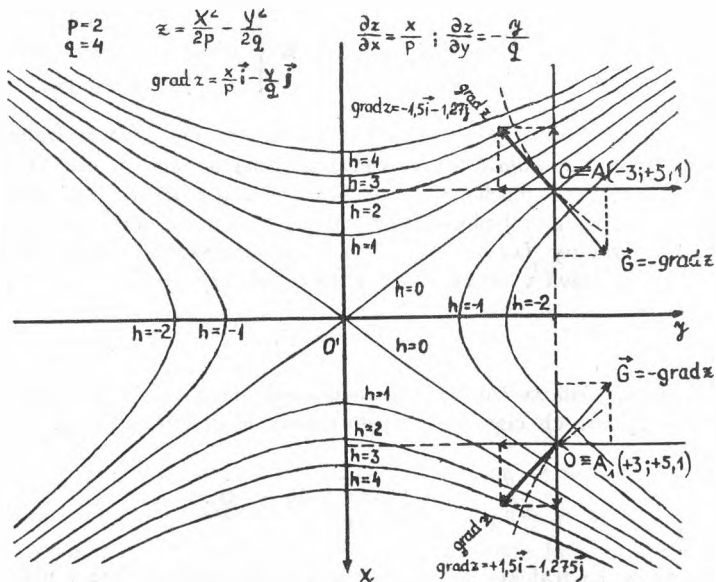
$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j}, \quad (7)$$

ktorého absolútna hodnota

$$\text{grad } z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} \quad (7')$$

nám udáva hodnotu spádu v smere spádovej krivky a je orientovaný na stranu $\frac{\partial n}{\partial z} > 0$

(obr. 1). Smerové kosínusy vektora $\text{grad } z$ v uvažovanom bode sú určené vzťahom



Obr. 1.

$$\cos \alpha \text{ grad } z \equiv \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{|\text{grad } z|}; \quad \cos \beta \text{ grad } z \equiv \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{|\text{grad } z|} \quad (7'')$$

a smerové kosínusy normály N na topografickej ploche (1) v bode $P(x, y, z)$ budú vzhľadom na orientáciu vektora $\text{grad } z$ určené vzťahmi

$$\cos \alpha_N = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\rho}; \quad \cos \beta_N = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\rho}; \quad \cos \gamma_N = \frac{-1}{\rho}; \quad \text{kde } \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}. \quad (7''')$$

Druhý člen skalárneho súčinu na pravej strane vzťahu (6') je jednotkový vektor

$$\mathbf{n}^0 = \frac{dx}{dn} \mathbf{i} + \frac{dy}{dn} \mathbf{j} \quad (8)$$

ležiaci v $\text{grad } z$, pričom jeho smer je totožný so smerom $\text{grad } z$ (obr. 1).

Vzhľadom na to môžeme vzťah (6') napísať ako

$$\frac{dz}{dn} \text{grad } z \cdot \mathbf{n}^0. \quad (9)$$

Určime teraz na základe vzťahov na uvažovanej jednotkovej guľovej ploche v súr. sústave $\langle O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ so stredom $S \equiv O$ v ľubovoľnom bode $P(x, y, z)$ na uvažovanej

topografickej ploche (1) pomocou jednotkového vektora normály \mathbf{N} , vektor \mathbf{G} ležiaci v rovine $(X Y)$, ktorého absolútna hodnota $|\mathbf{G}| = \operatorname{tg} \gamma$.

Uvažujme rovinu σ_{kN} určenú vektormi \mathbf{k}, \mathbf{N} , v ktorej tieto vektory ležia a ktorými je pre $\mathbf{N} \neq \mathbf{k}$ jednoznačne určená. Na priesečníku roviny σ_{kN} s rovinou (x, y) súr. sústavy $\langle O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ zvolíme jednotkový vektor \mathbf{N}' pre $\mathbf{N} \neq \mathbf{k}$ tak, aby pre uhol $\delta_{NN'}$ zovretý vektormi \mathbf{N} a \mathbf{N}' platilo, že $\delta_{NN'} < 90^\circ$ [4].

Takto zvolený jednotkový vektor určíme pomocou vektora \mathbf{n} , pričom vektor \mathbf{n} určíme z vektorových súčinov vektorov $\mathbf{N} \times \mathbf{k} = \mathbf{v}$ a $\mathbf{k} \times \mathbf{v} = \mathbf{n}$ v napísanom poradí, takže pre jednotkový vektor \mathbf{N}' bude platiť vzťah

$$\mathbf{N}' = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{k} \times \mathbf{v}|}. \quad (10)$$

Súradnice vektorov \mathbf{n} a \mathbf{N}' určíme pomocou už uvedených vektorových súčinov v napísanom poradí. Vektor \mathbf{n} leží v rovine σ_{kN} a súčasne v rovine $(X Y)$ a je daný vzťahom

$$\mathbf{n} = \cos \alpha_N \mathbf{i} + \cos \beta_N \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}, \quad (11)$$

takže $\mathbf{n} = \{ \cos \alpha_N; \cos \beta_N; 0 \}$. Vektor \mathbf{n} je kolmým priemetom vektora \mathbf{N} do roviny $(X Y)$. Vektor \mathbf{N}' je daný vzťahom

$$\mathbf{N}' = \frac{\cos \alpha_N}{\sin \gamma_N} \mathbf{i} + \frac{\cos \beta_N}{\sin \gamma_N} \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}. \quad (12)$$

Súradnice vektora \mathbf{N}' sú vzhľadom na $|\mathbf{N}'| = 1$ zároveň jeho smerovými kosínusmi

$$\mathbf{N}' \left\{ \frac{\cos \alpha_N}{\sin \gamma_N}; \frac{\cos \beta_N}{\sin \gamma_N}; 0 \right\}. \quad (12')$$

Určime teraz vektor \mathbf{G} pomocou vektora \mathbf{n} tak, aby $|\mathbf{G}| = \operatorname{tg} \gamma_N$ a aby vektor \mathbf{G} ležal vo vektore \mathbf{n} , pričom jeho smer nech je totožný so smerom vektora \mathbf{n} a teda aj \mathbf{N}' . Uvedená podmienka bude splnená, ak

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{v}}{\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}}. \quad (13)$$

Hodnota menovateľa na pravej strane vzťahu (13) ako skalárneho súčinu bude vzhľadom na $|\mathbf{N}| = 1, |\mathbf{k}| = 1$ rovná $\cos \gamma_N$.

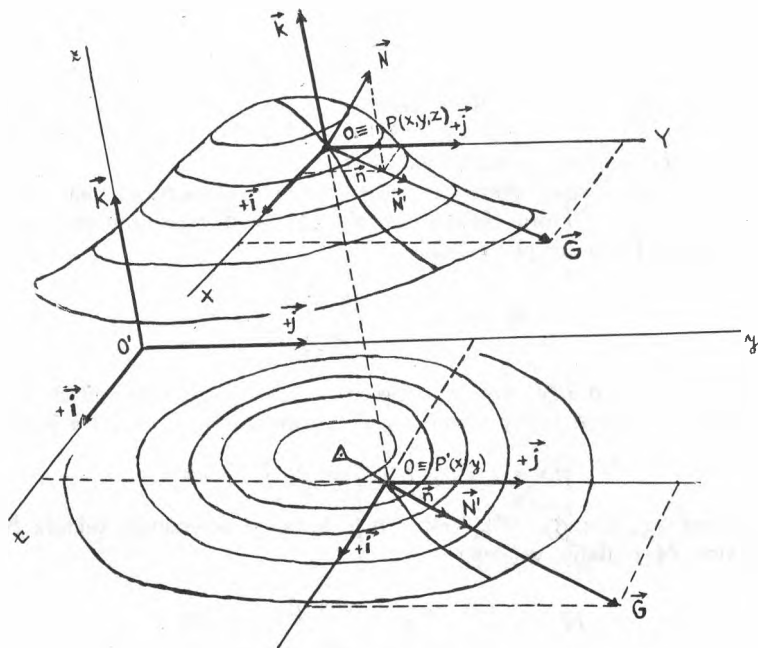
Vzťah (13) môžeme rozpísať vzhľadom na vzťah (11) ako

$$\mathbf{G} = \frac{\cos \alpha_N}{\cos \gamma_N} \mathbf{i} + \frac{\cos \beta_N}{\cos \gamma_N} \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}. \quad (14)$$

Vektor \mathbf{G} leží skutočne vo vektore \mathbf{n} a \mathbf{N}' a má smer totožný s nimi, lebo jeho smerové kosínusy sú totožné so smerovými kosínusmi jedn. vektora \mathbf{N}' (12'). To znamená, že

$$\cos \alpha_G = \frac{G_x}{|\mathbf{G}|} \equiv \cos \alpha_{N'}; \quad \cos \beta_G = \frac{G_y}{|\mathbf{G}|} \equiv \cos \beta_{N'}; \quad (15)$$

kde podľa vzťahu (14)



Obr. 2.

$$G_x = \frac{\cos \alpha_N}{\cos \gamma_N}; \quad G_y = \frac{\cos \beta_N}{\cos \gamma_N},$$

a preto aj skalárny súčin vektora \mathbf{G} a \mathbf{N}'

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{N}' = \frac{\cos \alpha_N}{\cos \gamma_N} \cdot \frac{\cos \alpha_N}{\sin \gamma_N} + \frac{\cos \beta_N}{\cos \gamma_N} \cdot \frac{\cos \beta_N}{\sin \gamma_N} = \operatorname{tg} \gamma_N. \quad (16)$$

Keďže vektor \mathbf{N}' leží v normále N' k izočiare (4) v rovine (x, y) , leží aj vektor \mathbf{G} v normále N' , pričom jeho abs. hodnota $|\mathbf{G}| = \operatorname{tg} \gamma_N$ určuje veľkosť spádu v smere spádovej krivky v bode $P'(x, y)$, kde bod P' je zvislým priemetom bodu $P(x, y, z)$ plochy (1) do roviny (x, y) , (obr. 2).

Vzhľadom na to môžeme napísať, že

$$\mathbf{G} \equiv -\operatorname{grad} z; \quad \mathbf{N}' \equiv -\mathbf{n}^{\circ}$$

a teda

$$\frac{dz}{dn} = -\operatorname{grad} z \cdot -\mathbf{n}^{\circ} \equiv \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}'. \quad (17)$$

Keďže smerové kosínusy normály N ako nositeľky jedn. vektora \mathbf{N} v ľubovoľnom bode $P(x, y, z)$ topografickej plochy (1) sú vzhľadom na $|\mathbf{N}| = 1$ zároveň aj jeho súradnicami, t. j.

$$x_N = \cos \alpha_N = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\rho}; \quad y_N = \cos \beta_N = \frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\rho}; \quad z_N = \cos \gamma_N = \frac{1}{\rho},$$

$$\text{kde } \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}, \quad (18)$$

môžeme, ak smerové kosínusy poznáme, t. j. ak ich s dostatočnou presnosťou zmeriame, z nich určiť dostatočne približnú hodnotu parciálnych derivácií $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$, pričom miera presnosti bude závislá od mierky mapy.

Veličiny $x_N = \cos \alpha_N$, $y_N = \cos \beta_N$ totiž vzhľadom na veličinu $z_N = \cos \gamma_N$ môžeme písať ako

$$x_N = \cos \alpha_N = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \cos \gamma_N; \quad y_N = \cos \beta_N = \left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \cos \gamma_N, \quad (18')$$

odkiaľ

$$-\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos \alpha_N}{\cos \gamma_N} \quad -\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos \beta_N}{\cos \gamma_N}. \quad (19)$$

Na tomto základe rozveďme teraz postup odvodenia rovnice rozhrania svetla a tieňa na reliéfe pre zvolený časový okamih na topograf. ploche (1), podľa B. Šalamona [10] a ukážme, že je to rovnica nulovej izalumklíny. (Na tomto mieste autor súčasne považuje si za povinnosť poďakovať prof. dr. B. Šalamonovi za jeho veľmi cenné podnety.)

Uvažujme prípad explicitne danej funkcie (1) tak, aby jej parciálne derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$ neobsahovali veličinu z . Pre rozhranie svetla a tieňa vo zvolenom časovom okamihu platí, že vektor $\mathbf{N} \perp \mathbf{L}$, t. j., že uhol δ_{LN} zovretý týmito dvoma vektormi sa rovná 90° , čiže $\delta_{exp} = 0^\circ$ a teda skalárny súčin vektorov $\mathbf{N} \{x_N, y_N, z_N\}$ a $\mathbf{L} \{x_L, y_L, z_L\}$ bude sa rovnáť nule, t. j.

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{L} = 0 \quad (20)$$

Skalárny súčin (20) vyjadrený pomocou kart. súradníc vzhľadom na vzťahy na pomocnej jedn. guľovej ploche, t. j. na orientáciu jedn. vektora \mathbf{G} a z nej vyplývajúcu orientáciu vektora \mathbf{N} bude

$$\cos \alpha_N \cos \alpha_L \cos \beta_N \cos \beta_L \cos \gamma_N \cos \gamma_L = 0. \quad (20')$$

Avšak ten istý súčin (20) vyjadrený pomocou súradníc vektorov \mathbf{N} , \mathbf{L} vzhľadom na vzťahy (7''') nadobudne tvar

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\rho} x_L + \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\rho} y_L - \frac{1}{\rho} z_L = 0, \quad (20'')$$

kde

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1},$$

odkiaľ po úprave vzhľadom na $|\mathbf{L}| = 1$ dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha_L + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta_L - \cos \gamma_L = 0, \quad (21)$$

pričom súradnice jedn. vektora \mathbf{L} sú pre zvolený časový okamih konštanty. Rovnica (21) je rovnicou valcovej plochy kolmej na rovinu (x, y) pre hodnoty z od $-\infty$ do $+\infty$ a súčasne určuje priemet nulovej izalumklíny a teda aj rozhranie svetla a tieňa do roviny (x, y) .

Preto sústava rovníc, ktorú dostaneme z rovnice (21) a (1) danej explicitne, t. j.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha_L + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta_L - \cos \gamma_L = 0 \\ z = z(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

a ktorej riešením je priesečnica týchto dvoch plôch, udáva priebeh nulovej izalumklíny a súčasne rozhranie svetla a tieňa na topografickej ploche (1) vo zvolenom časovom okamihu.

Rovnicu (21) možno tiež napísať ako skalárny súčin dvoch vektorov nasledovne:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} \right) (\cos \alpha_L \mathbf{i} + \cos \beta_L \mathbf{j}) = \cos \gamma_L, \quad (23)$$

kde v zmysle vzťahu (7)

$$\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} = \text{grad } z \text{ a } \cos \alpha_L \mathbf{i} + \cos \beta_L \mathbf{j} = \mathbf{l}, \quad (23')$$

pričom vektor \mathbf{l} je priemet jednotkového vektora \mathbf{L} do roviny (X, Y) , a preto pre $\gamma_L \neq 90^\circ$ $|\mathbf{l}| \neq 1$. Teda za predpokladu, že $\mathbf{L} \perp \mathbf{N}$, t. j. $\delta_{LN} = 90^\circ$ môžeme skalárny súčin (23) napísať ako

$$\text{grad } z \cdot \mathbf{l} = \cos \gamma_L. \quad (24)$$

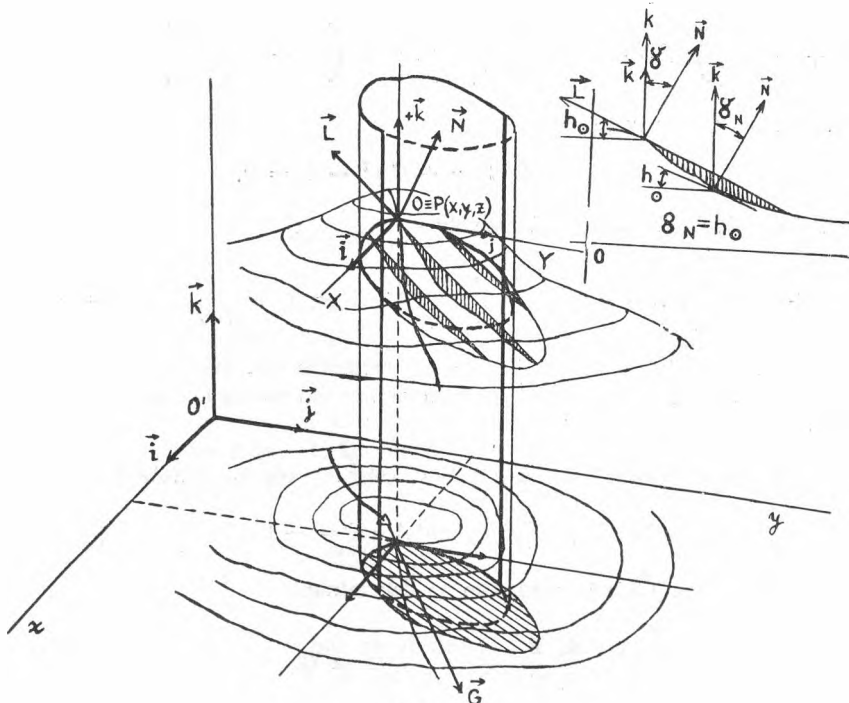
Ak uhol $\delta_{LN} \neq 90^\circ$, potom skalárny súčin (24) nadobudne hodnotu

$$\text{grad } z \cdot \mathbf{l} = \cos \omega, \quad (25)$$

kde skalár $\cos \omega \neq \cos \gamma_L$ sa rovná priemetu vektora $\text{grad } z$ do vektora \mathbf{l} . Vzťah (25) platí pre zvolený časový okamih s konštantným smerom vektora $\mathbf{L} \{x_L, y_L, z_L\}$ pre celú vymedzenú časť roviny (x, y) ako spojitého skalárneho poľa topografickej plochy (1), avšak veľkosť skalára $\cos \omega$ sa mení z miesta na miesto a iba pre množinu bodov tvoriacich rozhranie svetla a tieňa na reliéfe bude jeho hodnota rovná konštante $\cos \gamma_L$; t. j. $\omega = \cos \gamma_L$.

Táto vlastnosť je podkladom pre konštrukciu priemetu svetla a tieňa do roviny (x, y) pre zvolený časový okamih. Podmienkou je znalosť poľa $\text{grad } z$.

Sústava rovníc (22) neudáva však iba rozhranie svetla a tieňa na reliéfe, ale celú nulovú izalumklínu ako uzavretú krivku, lebo pre ňu platí vzťah (20). Rozhranie svetla a tieňa ako súčasť nulovej izalumklíny prebieha len po konvexnej časti topografickej plochy, pričom ostatná časť nulovej izalumklíny prebieha už v zatienenej oblasti topografickej plochy, po jej konkávnej časti (obr. 3).



Obr. 3.

Ak uvažujeme vzťahy na pomocnej jednotkovej guľovej ploche, potom jednotlivé vektory normály \mathbf{N} na topografickej ploche v množine bodov, pre ktorú platí, že v nej sú $\mathbf{N} \perp \mathbf{L}$, t. j., ktorá tvorí nulovú izalumklínu, ležia v rovine σ_L určenej jej vektorom normály \mathbf{L} $\{\cos \alpha_L, \cos \beta_L, \cos \gamma_L\}$ s konštantným smerom vo zvolenom časovom okamihu. Normálová rovnica roviny σ_L má tvar

$$x \cos \alpha_L + y \cos \beta_L \pm z \cos \gamma_L = 0. \quad (26)$$

Rovina σ_L prechádza počiatkom $O \equiv P(x, y, z)$ súr. sústavy $\langle O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ a pretína sa s pomocnou jednotkovou guľovou plochou v tej istej sústave o rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (27)$$

v kružnici určenej sústavou rovníc

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ x \cos \alpha_L + y \cos \beta_L + z \cos \gamma_L &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (28)$$

ktorú na jedn. guľovej ploche vytvárajú koncové body jedn. vektorov normál \mathbf{N} na topografickú plochu.

Ak riešime sústavu rovníc (28) podľa premennej veličiny z , dostaneme po úprave rovnicu

$$\left(1 + \frac{\cos^2 \alpha_L}{\cos^2 \gamma_L}\right) x^2 + 2 \frac{\cos \alpha_L \cos \beta_L}{\cos^2 \gamma_L} xy + \left(1 + \frac{\cos^2 \beta_L}{\cos^2 \gamma_L}\right) y^2 = 1, \quad (29)$$

ktorú môžeme napísať v tvare

$$A x^2 + 2 B xy + C y^2 - 1 = 0. \quad (29')$$

kde koeficienty $A, 2B, C, F$ majú hodnoty

$$A = 1 + \frac{\cos^2 \alpha_L}{\cos^2 \gamma_L}; \quad 2B = 2 \frac{\cos \alpha_L \cos \beta_L}{\cos^2 \gamma_L}; \quad C = 1 + \frac{\cos^2 \beta_L}{\cos^2 \gamma_L}; \quad F = -1. \quad (30)$$

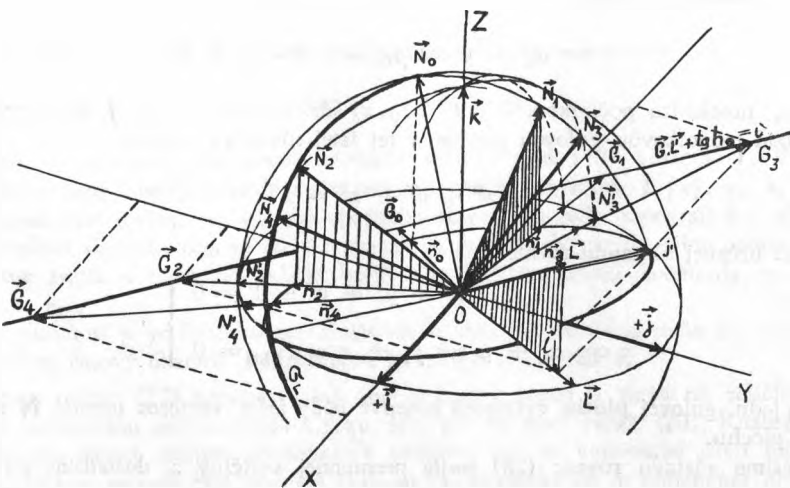
Koeficienty $A, 2B, C$, rovnice (29') obsahujú kartézské súř. vektora \mathbf{L} určené vzťahom (2). Ak ich vzhľadom na vzťah (2') transformujeme do polárnych súradníc, koeficienty budú mať tvar

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 + \cotg^2 h_{\circ} \cos^2 A_{\circ}; & 2B &= 2 \cotg^2 h_{\circ} \cos A_{\circ} \sin A_{\circ} \\ C &= 1 + \cotg^2 h_{\circ} \sin^2 A_{\circ}; & F &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (30')$$

Rovnica (29), resp. (29') je vzhľadom na determinant

$$\begin{vmatrix} A, & B \\ B, & C \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin^2 h_{\circ}} \neq 0 \quad (31)$$

pre $h_{\circ} > 0^{\circ}$ rovnicou elipsy ako zvislého priemetu kružnice (28) do roviny (XY) súř. súst. $\langle O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$. Ako to vyplýva z tvaru rovnice, stred elipsy sa nachádza v počiatku O kart. súř. súst. $\langle O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$, pričom je elipsa vzhľadom na túto sústavu pootočená o určitý uhol α (obr. 4). Veľkosť pootočenia elipsy uvažovanej v kart. súř. sústave $\langle O, \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}' \rangle$ vzhľadom na kart. sústavu $\langle O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ sa rovná uhlu



Obr. 4.

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 B}{A - C}, \quad (32)$$

t. j. vzhľadom na (30), resp. (30')

$$\operatorname{tg} 2 A_{\circ} = \frac{2 \operatorname{tg} A_{\circ}}{1 - \operatorname{tg}^2 A_{\circ}}, \quad (32')$$

z čoho vyplýva, že kart. súr. sústava $\langle O, \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}' \rangle$ je pootočená v rovine (XY) voči kart. súr. sústave $\langle O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ o uhol $\alpha = A_{\circ}$ zovretý jednotkovým vektorom $\mathbf{i}' \equiv \mathbf{L}'$ s jednotkovým vektorom \mathbf{i} . Jednotkový vektor $\mathbf{k}' \equiv \mathbf{k}$.

Jednotkový vektor \mathbf{i}' je teda vzhľadom na hodnotu uhla pootočenia A_{\circ} totožný s vektorom \mathbf{L}' . Jednotkový vektor \mathbf{L}' leží v priesečnici zvislej roviny δ_{kL} jednoznačne určenej v nej ležiacimi vektormi \mathbf{k}, \mathbf{L} pre $\mathbf{k} \neq \mathbf{L}$, s rovinou (XY) tak, že uhol $\sigma_{LL'}$ zovretý vektorom \mathbf{L} a \mathbf{L}' je $0^{\circ} < \delta_{LL'} < 90^{\circ}$, [4]. V zmysle práce [4] vektor \mathbf{L}' je určený vzťahom

$$\mathbf{L}' = \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|} = \frac{\cos \alpha_L}{\sin \gamma_L} \mathbf{i} + \frac{\cos \beta_L}{\sin \gamma_L} \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}, \quad (33)$$

kde vektor $\mathbf{l} \{ \cos \alpha_L, \cos \beta_L, 0 \}$ pre priemet vektora \mathbf{L} do roviny (XY) a má ten istý smer ako vektor \mathbf{L}' . Vzhľadom na $|\mathbf{L}'| = 1$ súradnice vektora

$$\mathbf{L}' \left\{ \frac{\cos \alpha_L}{\sin \gamma_L}; \frac{\cos \beta_L}{\sin \gamma_L}; 0 \right\}; \quad (33')$$

sú zároveň aj jeho smerovými kosínusmi, t. j. vzhľadom na vzťah (2') platí

$$\frac{\cos \alpha_L}{\sin \gamma_L} = \cos A_{\circ} \quad \frac{\cos \beta_L}{\sin \gamma_L} = \sin A_{\circ} \quad (33'')$$

kde však uhol A_{\circ} je uhol otočenia súr. sústavy $\langle O, \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}' \rangle$ oproti súr. sústave $\langle O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$.

Preto poloha elipsy (29) v rovine (XY) bude závislá od smeru vektora $\mathbf{L}' \equiv \mathbf{i}'$ súr. sústavy $\langle O, \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}' \rangle$. Vektor \mathbf{j}' tejto sústavy leží vzhľadom na $\mathbf{k}' \equiv \mathbf{k}$ v rovine (XY) a je kolmý na \mathbf{i}' .

Zistíme ho pomocou vektorového súčinu

$$\mathbf{j}' = \mathbf{k} \times \mathbf{i}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\cos \alpha_L}{\sin \gamma_L} & \frac{\cos \beta_L}{\sin \gamma_L} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\cos \beta_L}{\sin \gamma_L} \mathbf{i} + \frac{\cos \alpha_L}{\sin \gamma_L} \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}, \quad (34)$$

t. j.

$$\mathbf{j}' \left\{ \frac{\cos \beta_L}{\sin \gamma_L}; \frac{\cos \alpha_L}{\sin \gamma_L}; 0 \right\}.$$

Ako vyplýva zo vzťahu (32), (32'), malá poloos b elipsy v súr. sústave $\langle O, i', j', k' \rangle$ leží vo vektore $L' = i'$, pričom vzhľadom na koeficienty (30') rovnice (29') bude jej veľkosť $b = \sin h_{\odot}$, veľká poloos $-a-$ leží vo vektore j' , pričom veľkosť $a = 1$.

Súradnice x, y bodov elipsy sú súradnicami vektorov \mathbf{L} , v ktorých aj vzhľadom na vzťahy (10) až (12') ležia aj vektory \mathbf{N}' a vzhľadom na vzťahy (13) až (16) aj vektory \mathbf{G} .

Pre naše úvahy sú dôležité všetky tie vektory \mathbf{N} normály na reliéfe ležiace vzhľadom na to, že $\mathbf{N} \perp \mathbf{L}$ v rovine $\sigma_{\mathbf{L}}$, ktoré majú kladné hodnoty súradníc z_N , t. j. ich $z > 0$, lebo na reliéfe, ktorý môžeme nahradiť spojitou plochou v zmysle podmienok vyslovených v predošlých príspevkoch [2, 3, 4] sa vektory normály \mathbf{N} so zápornými hodnotami súradníc z_N nevyskytujú. Vyskytujú sa iba vo vysokohorskom reliéfe s previsnutými stenami, ktorý však z geografického hľadiska nemôžeme bez prílišnej generalizácie nahradiť spojitou plochou.

Preto uvažujme na elipse (29') tú jej časť vytvorenú koncovými bodmi vektorov $\mathbf{n} \{ \cos \alpha_N, \cos \beta_N, 0 \}$, ktoré ako priemety vektorov normály \mathbf{N} do roviny (XY) odpovedajú vektorom normály \mathbf{n} s kladnými hodnotami súradníc z_N . Ak túto podmienku vyjadríme pomocou horizontálnych uhlov v rovine (XY) , potom budeme uvažovať vzhľadom na súr. sústavu $\langle O, i, j, k \rangle$ tú časť elipsy, ktorej sprievodiče \mathbf{n} majú smerové kosínusy

$$\cos A_N = \frac{\cos \alpha_N}{\sin \gamma_N}; \quad \sin A_N = \frac{\cos \beta_N}{\sin \gamma_N} \quad (35)$$

s hodnotou azimutu A_N v intervale $A_{\odot} + 90^{\circ} < A_N < A_{\odot} + 270^{\circ}$ (obr. 5). V tomto intervale bude pre hodnotu uhla A_N ako azimutu platíť, že $A_N = [(A_{\odot} + 180^{\circ}) + \xi]$, kde veľkosť uhla ξ sa pohybuje v intervale $0^{\circ} \leq \xi \leq 90^{\circ}$. Odtiaľ pre smerové kosínusy vektora \mathbf{n} dostaneme vzťah

$$\begin{aligned} \cos A_N &= -\cos(A_{\odot} \pm \xi) \\ \sin A_N &= -\sin(A_{\odot} \pm \xi), \end{aligned} \quad (36)$$

pričom uhol ξ je uhol zovretý vektormi $-\mathbf{L}$ a \mathbf{G} .

Vzhľadom na vzťah (13) je

$$|\mathbf{n}| = \sin \gamma_N,$$

ktorej zmena ako sprievodiča elipsy sa bude meniť podľa vzťahu určeného v polárnych súradniciach vzhľadom na sústavu $\langle O, i, j, k \rangle$

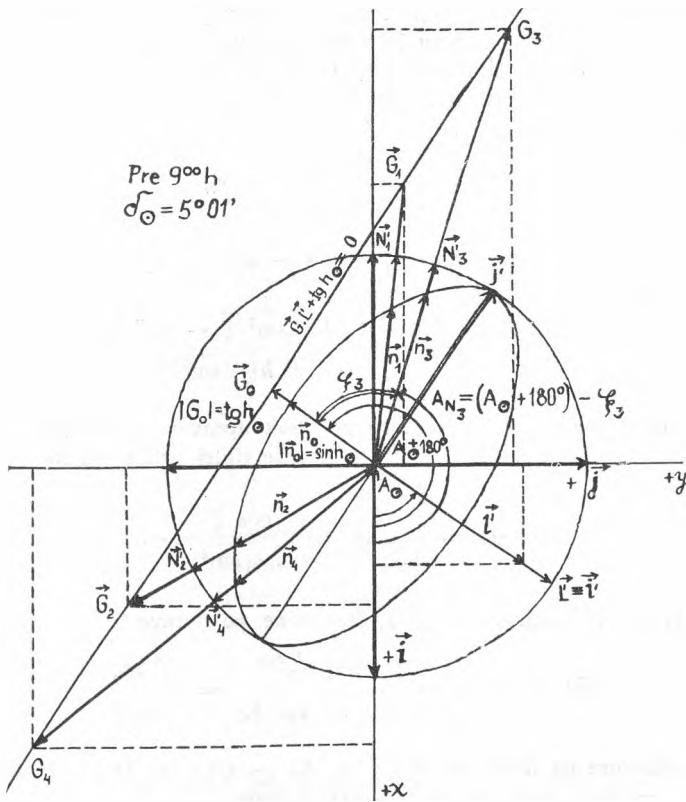
$$|\mathbf{n}| = \frac{\sin h_{\odot}}{\sqrt{1 - \cos^2 h_{\odot} \sin^2 \xi}}, \quad (37)$$

kde veličina

$$\sin h_{\odot} = b; \quad \cos^2 h_{\odot} = e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (37')$$

a uhol

$$\begin{aligned} \xi &= A_N - (A_{\odot} + 180^{\circ}) \\ \cos \xi &= -\cos(A_N - A_{\odot}); \quad \sin \xi = -\sin(A_N - A_{\odot}). \end{aligned} \quad (37'')$$



Obr. 5.

Vzhľadom na veličiny (37'), (37'') vzťah pre veľkosť n sprievodiča elipsy môžeme napísať v tvare

$$|n| = \frac{\sin h_{\odot}}{\sqrt{1 - \cos^2 h_{\odot} \sin^2 (A_N - A_{\odot})}} = \sin \gamma_N, \quad (37''')$$

z ktorého pre hodnotu uhla $(A_N - A_{\odot}) = 180^{\circ}$ vyplýva, že $|n| = 1 = a$, t. j., že $|n|$ sa mení v intervale

$$b = \sin h_{\odot} \leq |n| \leq 1 = a. \quad (38)$$

Vyjdúc z predošlých vzťahov (35) až (37''') kartézske súradnice vektora n ako sprievodiča elipsy budú v kart. súr. sústave $\langle O, i, j, k \rangle$ určené vzťahmi

$$\begin{aligned} x_N &= |n| \cos A_N \\ y_N &= |n| \sin A_N \end{aligned}, \quad (39)$$

kde pre veličiny $\cos A_N$, $\sin A_N$ platia vzťahy (36).

Uvažujme teraz vektor G udaný vzťahmi (13), (14), ktorého $|G| = \operatorname{tg} \gamma$ sa v nu-

lovej izalumklíne a teda aj na rozhraní svetla a tieňa ako jej súčasti vo zvolenom časovom okamihu mení v závislosti od zmeny jeho smeru a vyšetríme priebeh tejto zmeny. Pre množinu bodov nulovej izalumklíny dostaneme abs. hodnoty vektora \mathbf{G} vyjadrené v závislosti od jeho smeru vzhľadom ku konšt. hodnote h_{\odot} , A_{\odot} pre zvolený časový moment, ak vzhľadom na

$$|\mathbf{G}| = \frac{\sin \gamma_N}{\cos \gamma_N} = \operatorname{tg} \gamma_N$$

zo vzťahu (37) na základe vzorca $\cos \gamma_N = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma_N}$ vyjadríme $\cos \gamma_N$, v ktorom po úprave dostaneme

$$\cos \gamma_N = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 h_{\odot} \sin^2 \xi - \sin^2 h_{\odot}}}{\sqrt{1 - \cos^2 h_{\odot} \sin^2 \xi}} \quad (40)$$

a týmto vzťahom vydělíme vzťah (37). Najprv však upravme vzťah (40) tak, že v jeho čitateli za $\sin^2 h_{\odot}$ dosadíme $(1 - \cos^2 h_{\odot})$, takže ďalej vzhľadom na $1 - \sin^2 \xi = \cos^2 \xi$ dostaneme

$$\cos \gamma_N = \frac{\cos h_{\odot} \cos \xi}{\sqrt{1 - \cos^2 h_{\odot} \sin^2 \xi}} \quad (41)$$

Ak vydělíme týmto vzťahom vzťah (37), dostaneme po úprave

$$|\mathbf{G}| = \operatorname{tg} \gamma_N = \frac{\sin h_{\odot}}{\cos h_{\odot} \cos \xi} = \frac{\operatorname{tg} h_{\odot}}{\cos \xi} \quad (42)$$

Keďže však vzhľadom na hodnotu uhla $\xi = A_N - (A_{\odot} + 180^{\circ})$, ktorého $\cos \xi = -\cos(A_N - A_{\odot})$, môžeme (42) napísať v tvare

$$|\mathbf{G}| = \operatorname{tg} \gamma_N = \frac{\operatorname{tg} h_{\odot}}{\cos(A_N - A_{\odot})} \quad (42')$$

Vzťah (42') vyjadruje závislosť zmeny abs. hodnoty vektora \mathbf{G} od zmeny hodnoty uhla A_N v množine bodov tvoriacich nulovú izalumklínu, pre zvolený časový okamih s konštantnou hodnotou h_{\odot} , A_{\odot} . Vektor \mathbf{G} vyjadrený pomocou pravouhlých zložiek v súr. súst. $\langle O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$, t. j.

$$\mathbf{G} = G_x \mathbf{i} + G_y \mathbf{j} \quad (43)$$

kde

$$G_x = |\mathbf{G}| \cos A_N; \quad G_y = |\mathbf{G}| \sin A_N,$$

bude vzhľadom na vzťah (36) a (42)

$$\mathbf{G} = \frac{\operatorname{tg} h_{\odot}}{\cos \xi} [-\cos(A_{\odot} \pm \xi) \mathbf{i} - \sin(A_{\odot} \pm \xi) \mathbf{j}], \quad (43')$$

t. j. pre množinu bodov nulovej izalumklíny a teda aj pre rozhranie svetla a tieňa na ploche (1) vo zvolenom časovom okamihu bude, v závislosti od premennej veľkosti uhla ξ , určený súradnicami

$$\mathbf{G} \left\{ -\frac{\operatorname{tg} h_{\circ} \cos (A_{\circ} \pm \xi)}{\cos \xi}; -\frac{\operatorname{tg} h_{\circ} \sin (A_{\circ} \pm \xi)}{\cos \xi} \right\}. \quad (44)$$

Zo vzťahu (42) vyplýva, že pre hodnotu uhla ξ zovretého vektorom $-\mathbf{L}'$ s vektorom \mathbf{G} , rovnú 0° , t. j. keď vektor \mathbf{G} , uvažovaný v polárnych súradniciach, má hodnotu azimutu

$$A_G \equiv A_N = A_{\circ} + 180^{\circ}, \quad (a)$$

(to znamená, že leží vo vektore $-\mathbf{L}'$ a súčasne vo vektore \mathbf{n} s $|\mathbf{n}| = \sin h_{\circ}$ a má s nimi totožný smer), bude $|\mathbf{G}| = \operatorname{tg} h_{\circ}$. To znamená, že hodnota spádu γ_N v smere spádovej krivky na reliéfe v tých bodoch tvoriacich nulovú izalumklínu a teda aj rozhranie svetla a tieňa na reliéfe vo zvolenom časovom okamihu, v ktorých je orientácia svahu

$$A_N = A_{\circ} + 180^{\circ}, \quad (a')$$

bude rovná h_{\circ} , t. j. $\gamma_N = h_{\circ}$. Pre túto hodnotu azimutu A_N je priemet L' slnečného lúča L do roviny (xy) súr. sústavy $\langle O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ totožný s priemetom N' normály N k topogr. ploche (1) vo zvolenom bode $P(x, y, z)$ do roviny (xy) v jej bode $P'(x, y)$, t. j. v tomto bode bude vektor \mathbf{G} kolineárny s vektorom \mathbf{L}' ; pre túto hodnotu bude rovina $\sigma_{kN} \equiv \sigma_{kL}$, takže budú mať spoločnú priesečnicu s rovinou (xy) , v ktorej ležia vektory \mathbf{G} a \mathbf{L}' .

Pre hodnotu uhla $\xi = 90^{\circ}$, t. j. pre hodnotu azimutu

$$A_G \equiv A_N = A_{\circ} + 90^{\circ} \text{ a } A_G \equiv A_N = A_{\circ} + 270^{\circ} \quad (b)$$

vektora \mathbf{G} , pre ktorú tento vektor leží v poloosách $-a-$ bude, opäť vzhľadom na vzťahy (13), (14) a na vzťahy (42), $|\mathbf{G}| = \operatorname{tg} \gamma_N = \infty$. To znamená, že hodnota uhla spádu γ_N v smere spádovej krivky na ploche (1) bude v tých bodoch tvoriacich nulovú izalumklínu a teda aj rozhranie svetla a tieňa, v ktorých je orientácia svahu A_N rovná hodnote (b), rovná 90° , t. j. $\gamma_N = 90^{\circ}$. Z uvedeného, vyplýva, že pre zvolený časový okamih s konštantnou hodnotou veličín h_{\circ} , A_{\circ} sa $|\mathbf{G}|$ pohybuje v intervale

$$\operatorname{tg} h_{\circ} \leq |\mathbf{G}| \leq \infty. \quad (44')$$

V uplynulých odsekoch sme odvodili pomocou uvažovanej jednotkovej guľovej plochy v súr. sústave $\langle O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ s jej počiatkom O v bode $P(x, y, z)$ plochy (1) vzťahy medzi vektorom \mathbf{n} a vektorom \mathbf{G} , kde vektor \mathbf{n} bol sprievodičom elipsy (29) ako priemetu kružnice (28) do roviny (XY) . Zároveň sme určili závislosť hodnoty vektora \mathbf{G} od jeho smeru v množine bodov nulovej izalumklíny. Určíme teraz, akú krivku vytvorí koncový bod vektora \mathbf{G} v súvislosti so zmenou smeru pri súčasnej zmene jeho absolútnej hodnoty. Vydíme teraz zo skalárneho súčinu vektora \mathbf{N} a \mathbf{L} (20'). Skalárny súčin (20') vektora \mathbf{N} s vektorom \mathbf{L} vynásobme členom $1/\cos \gamma_N$, takže po úprave dostaneme výraz

$$\frac{\cos \alpha_N}{\cos \gamma_N} \cos \alpha_L + \frac{\cos \beta_N}{\cos \gamma_N} \cos \beta_L = -\cos \gamma_L. \quad (45)$$

Výraz (45) môžeme rozpísať ako skalárny súčin dvoch vektorov

$$\left(\frac{\cos \alpha_N}{\cos \gamma_N} \mathbf{i} + \frac{\cos \beta_N}{\cos \gamma_N} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\cos \alpha_L \mathbf{i} + \cos \beta_L \mathbf{j} \right) = -\cos \gamma_L, \quad (46)$$

kde prvý člen skalárneho súčinu je vzhľadom na vzťahy (19) vektor $\mathbf{G} = -\text{grad } z$ a druhý člen je vektor \mathbf{l} ako priemet vektora \mathbf{L} do roviny (xy) . Ak vo vzťahu (46) vyjadríme veličiny $\cos \alpha_N$, $\cos \beta_N$, $\cos \gamma_N$, $\cos \alpha_L$, $\cos \beta_L$, $\cos \gamma_L$ vzhľadom na vzťahy (2') pomocou polárnych súradníc, dostaneme po úprave

$$\text{tg } \gamma_N (\cos A_N \mathbf{i} + \sin A_N \mathbf{j}) \cdot (\cos A_O \mathbf{i} + \sin A_O \mathbf{j}) = -\text{tg } h_O, \quad (47)$$

kde

$$\begin{aligned} \text{tg } \gamma_N (\cos A_N \mathbf{i} + \sin A_N \mathbf{j}) &= \mathbf{G} \\ \cos A_O \mathbf{i} + \sin A_O \mathbf{j} &= \mathbf{L}, \end{aligned} \quad (48)$$

takže vzťah (47) môžeme písať ako

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{L} = -\text{tg } h_O \text{ resp. } -\text{grad } z \cdot \mathbf{L} = -\text{tg } h_O. \quad (49)$$

Veličina $\text{tg } h_O$ je pre zvolený časový okamih konštantná, a tak isto je konštantný smer vektora \mathbf{L} a mení sa iba smer a veľkosť vektora $\mathbf{G} = -\text{grad } z$. Rovnicu (49) upravme na tvar

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{L} + \text{tg } h_O = 0, \text{ resp. } -\text{grad } z \cdot \mathbf{L} + \text{tg } h_O = 0, \quad (49')$$

čo je rovnica priamky vo vektorovom tvare. Člen $\text{tg } h_O$ je vzdialenosť priamky od počiatku O . Rovnicu (49') môžeme vyjadriť v normálovom tvare ako

$$-x \cos A_O - y \sin A_O + \text{tg } h_O = 0, \quad (50)$$

v ktorej premenné veličiny x, y sú súradnice vektora $\mathbf{G} = -\text{grad } z$ vyjadrené vo vzťahu (44) v závislosti od uhla ξ premennom v intervale $0^\circ \leq \xi \leq 90^\circ$, v množine bodov nulovej izalumklíny. Z rovnice (21) by sme na základe vzťahov (2') po vyjadrení kart. súradníc vektora \mathbf{L} pomocou polárnych, po úprave dostali rovnicu priamky vo vektorovom tvare ako (49'), lenže s opačným znamienkom pre $\text{tg } h_O$. Z rovníc (49'), (50) vyplýva, že vektor \mathbf{G} sa v množine bodov tvoriacich nulovú izalumklínu mení tak, že ich koncové body vytvárajú priamku (obr. 5). Na obr. 5 sme na numerický výpočet použili pre zvolený časový moment 9,00 hod. súradnice vektorov $\mathbf{N} \{x_N, z_N, y_N\}$ nulovej izalumklíny

$$\mathbf{N}_1 \begin{cases} x_N = -0,79711 \\ y_N = +0,07909 \\ z_N = +0,59863 \end{cases} \quad \mathbf{N}_2 \begin{cases} x_N = +0,37957 \\ y_N = -0,70539 \\ z_N = +0,59863 \end{cases}$$

9,00 hod.

$$\mathbf{N}_3 \begin{cases} x_N = +0,57294 \\ y_N = -0,70183 \\ z_N = +0,42329 \end{cases} \quad \mathbf{N}_4 \begin{cases} x_N = -0,86820 \\ y_N = -0,25897 \\ z_N = +0,42329 \end{cases}$$

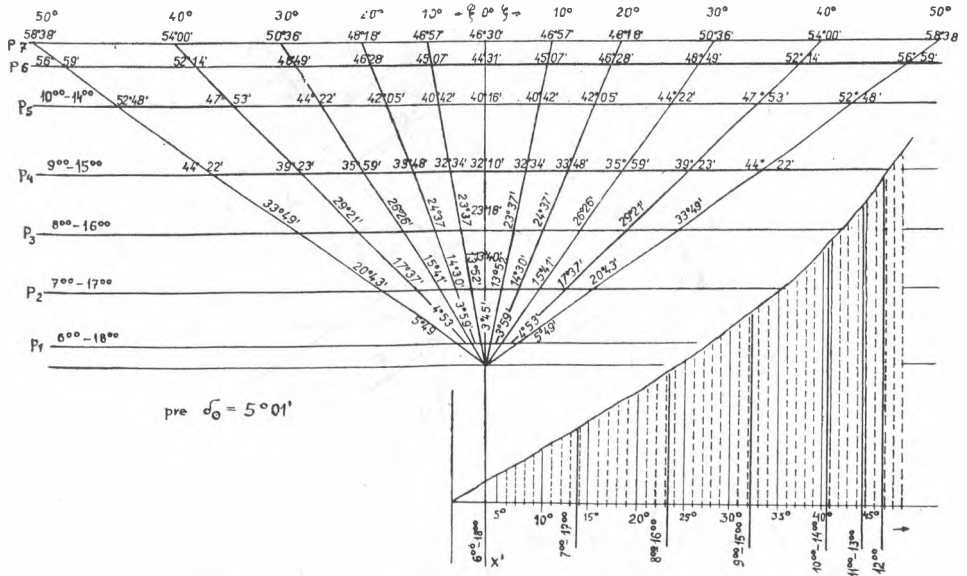
I.

spočítanými pomocou parametrických rovníc pre izalumklíny prác [4, 6], pre hodnoty parametrov $t_1 = 225^\circ$, $t_2 = 315^\circ$, $t_3 = 210^\circ$, $t_4 = 300^\circ$, ktorým v tabuľkách 3 práce [6] odpovedajú hodnoty v polárnych súradniciach, A_N, γ_N

$$\begin{array}{l}
 A_{N_1} = 174^\circ 20' \quad \gamma_{N_1,2} = 53^\circ 14' \quad A_{N_3} = 163^\circ 23' \\
 A_{N_2} = 298^\circ 17' \quad \gamma_{N_3,4} = 64^\circ 57', \quad II. \\
 A_{N_4} = 309^\circ 14'
 \end{array}$$

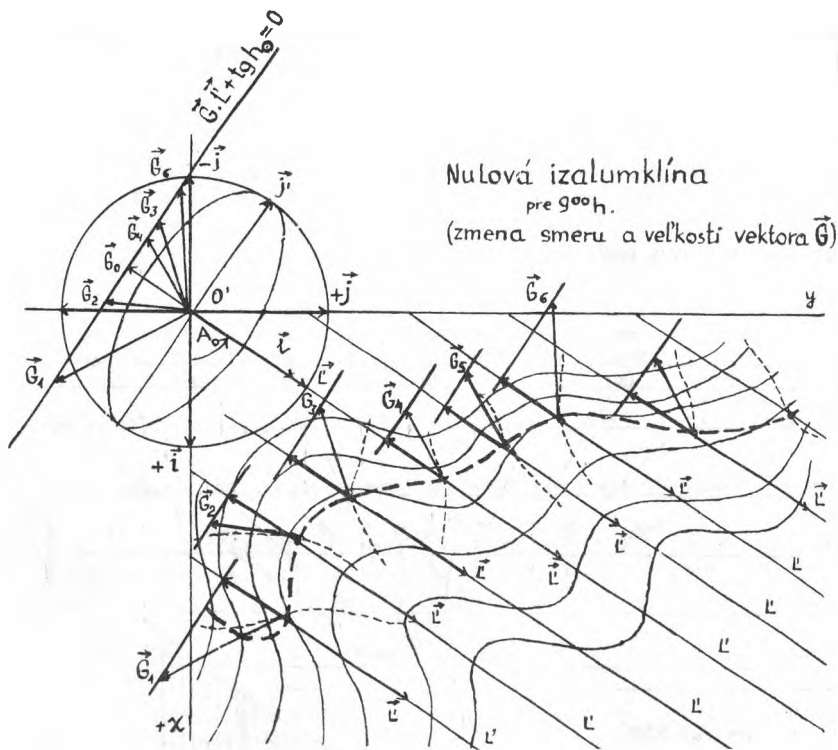
kde A_N je orientácia reliéfu a γ_N je sklon reliéfu v smere spádovej krivky.

Skutočnosť, že koncové body vektorov $\mathbf{G} = -\text{grad } z$ pre zvolený časový okamih v množine bodov nulovej izalumklíny a teda aj rozhrania svetla a tieňa vytvárajú priamku, je podkladom pre grafickú konštrukciu nulovej izalumklíny v mape. Graf pre konštrukciu nulovej izalumklíny môžeme zostrojiť nasledovne.



Obr. 6.

Zostrojíme úsečky p_1, p_2, \dots kolmé na os X' súr. sústavy $\langle O, i', j', k' \rangle$ vo vzdialenosti od počiatku rovné $d_1 = \text{tg } h_{0,1}, d_2 = \text{tg } h_{0,2}, \dots$ kde veľkosť uhla h_0 sa mení so zvoleným časovým momentom T . Od počiatku O vynesieme iné úsečky g_1, g_2, \dots zvierajúce s osou X' uhly ξ_1, ξ_2, \dots v pravidelných intervaloch $\Delta \xi$. Priesečníky jednotlivých úsečiek g_1, g_2, \dots s príslušnou úsečkou p odpovedajúcou zvolenému časovému momentu nám určujú veľkosť vektora $\mathbf{G} = -\text{grad } z$ v nulovej izalumklíne a teda aj na rozhraní svetla a tieňa na reliéfe (obr. 6). Na obr. 6 sme pre jednotlivé priamky p_1, p_2, \dots zvolili časové intervaly $\Delta T = 1$ hod. a pre jednotlivé úsečky g_1, g_2, \dots uhlové intervaly $\Delta \xi = 10^\circ$ uhla ξ . Do mapy so zostrojenými spádovými krivkami a s nameranými hodnotami sklonu na nich, alebo so zostrojenými izoklínami vynesieme dostatočne husto priamky L' s hodnotou azimutu A_0 pre zvolený časový moment a graf priložíme na mapu s osou X' tak, aby bola totožná s L' pri zachovaní orientácie vektora \mathbf{L}' . Grafom posúvame pozdĺž L' , až nájdeme na nej bod s hodnotou veľkosti \mathbf{G} určenej vzťahom (42) pre vektor \mathbf{G} ležiaci v dotyčnici ku spádovej krivke v mape. Takto vyznačenými bodmi na všetkých priamkach L' v mape interpolujeme nulovú izalumklínu (obr. 7).



Nulová izalumklína
pre $g^{00}h_0$.
(zmena smeru a veľkosti vektora \vec{G})

Obr. 7.

Na priesečníkoch úsečiek p s úsečkami g sú v grafe vpísané príslušné hodnoty spádu v smere spádovej krivky. Ak má spádová krivka smer medzi niektorými úsečkami, môžeme interpolovať príslušnú hodnotu sklonu na zostrojenej tangente. Vzhľadom na to, že so zväčšujúcim sa uhlom sklonu γ_N stúpa aj hodnota $\text{tg } \gamma_N$, merajú sa s grafom lepšie tie body pre nulovú izalumklínu v mape, v ktorých je väčšia hodnota $\text{tg } \gamma_N$. Malé sklonky sa merajú dosť ťažko, čo je značná nevýhoda grafu. Nulovú izalumklínu možno graficky zostrojiť aj bez nutnosti konštruovať izokliny tak, že veľkosť sklonu pre zvolený výškový interval Δz jednotlivých vrstevníc meriame z veľkosti vzdialenosti Δn medzi vrstevnicami, určenej vzťahom

$$\frac{\Delta n}{\Delta z} = \text{ctg } \gamma_N \quad \Delta n = \Delta z \text{ ctg } \gamma_N. \quad (52)$$

Ak uvažujeme rozhranie svetla a tieňa a celú nulovú izalumklínu, vzťah (52) nadobudne vzhľadom na vzťahy (42), (42') tvar

$$\frac{\Delta n}{\Delta z} = \text{ctg } h_0 \cos \xi; \quad \Delta n = \Delta z \text{ ctg } h_0 \cos \xi. \quad (52')$$

Preto zostrojíme graf tak, že na priamky g_1, g_2, \dots nanášame od počiatku O príslušné hodnoty

$$\Delta n_1 = \Delta z \cotg h_{\odot} \cos \xi_1$$

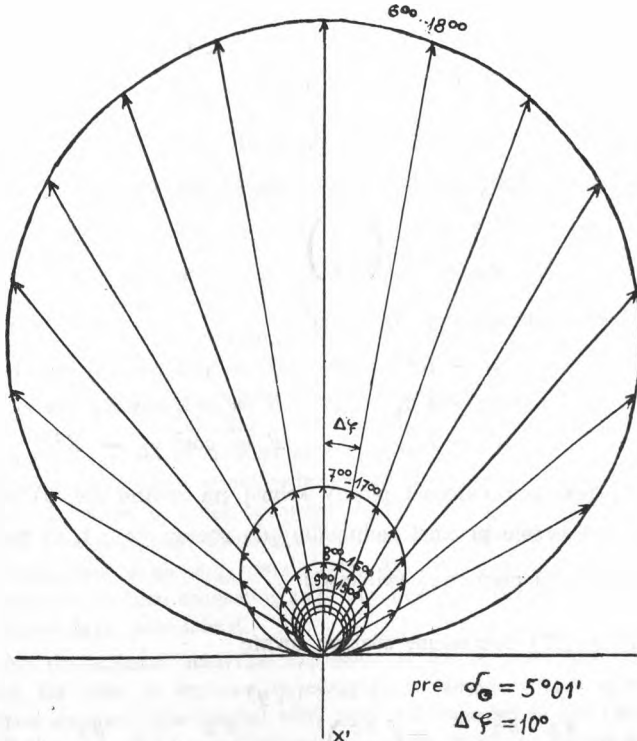
$$\Delta n_2 = \Delta z \cotg h_{\odot} \cos \xi_2$$

$$\vdots$$
(53)

pre jednotlivé hodnoty $h_{\odot,1}, h_{\odot,2}, \dots$, kde hodnoty n_1, n_2, \dots sú vzdialenosti medzi vrstevnicami v smere spádovej krivky pre zvolený výškový interval Δz , príslušný uhol ξ a časový moment T s hodnotou uhla h_{\odot} . Zo vzorcov (53) vidieť, že úsečkám p_1, p_2, \dots na grafe odpovedajú kružnice s priemerom $d_1 = 2 r_1 = \cotg h_{\odot,1}$, $d_2 = 2 r_2 = \cotg h_{\odot,2}$ o rovnici, majúcej v polárnych súradniciach tvar

$$\Delta n - \cotg h_{\odot} \cos \xi = 0, \tag{54}$$

kde Δn je sprievodič, ktorého koncový bod vytvára pri zmene uhla ξ v intervale $(0, \frac{\pi}{2})$ kružnicu pre časový moment T s hodnotou uhla h_{\odot} (obr. 8). Tento veľmi jednoduchý grafický spôsob zostrojenja nulovej izalumnklíny je však vhodný pre mapy veľkých mierok do 1:10 000, kde vzdialenosť medzi vrstevnicami Δn je dostatočne veľká i pri väčších hodnotách sklonu. Väčšie sklony v mape v smere spádovej krivky sa týmto grafickým spôsobom merajú ťažko, lebo hodnoty Δn sa so zväčšujúcim sklonom rýchlo znižujú. Vypomôžeme si buď zväčšením intervalu Δn medzi vrstevnicami, alebo



Obr. 8.

meriame predošlým grafickým spôsobom. Graf na obr. 8 si pre mapu príslušnej mierky ľahko zostrojíme pre jednotlivé hodiny i rôzne hodnoty výškového intervalu Δz medzi vrstevnicami. Uvedené grafické spôsoby zostrojenia nulovej izalumklíny nie sú jediné; možnosť grafickej konštrukcie vyplývajúcej z odvodených vzťahov je viac.

Po rozbere problematiky nulovej izalumklíny a rozhrania svetla a tieňa na reliéfe odvodíme všeobecnú rovnicu pre ostatné nenulové izalumklíny. Ako sme už spomenuli, sústavu parametrických rovníc izalumklín sme pre topografickú plochu (1), ktorej konkrétne analytické vyjadrenie nepoznáme, odvodili v práci [4]. Tento postup nám umožnil numericky vyjadriť a stabelovať hodnoty orientácie A_N a sklonu γ_N v smere spádovej krivky na reliéfe v množine bodov tvoriacich izalumklínu pre príslušnú hodinu [6]. Pri odvodení všeobecnej rovnice nenulových izalumklín vyjdeme opäť zo skalárneho súčinu vektorov \vec{N} a \vec{L} , v ktorom pre $\delta_{LN} \neq 90^\circ$, t. j. pre $\vec{N} \perp \vec{L}$ bude vo zvolenom časovom okamihu s konštantným smerom vektora \vec{L} hodnota $\cos \delta_{LN}$ rovná konštante K . To znamená, že skalárny súčin vzhľadom na $|\vec{N}| = 1$ a $|\vec{L}| = 1$ bude

$$\vec{N} \cdot \vec{L} = \cos \delta_{LN} = K. \quad (55)$$

Za súradnice vektora \vec{N} môžeme vzhľadom na $|\vec{N}| = 1$ považovať smerové kosínusy určené vzťahmi (7''') alebo (18). Nech sú súradnice vektora \vec{N} určené vzťahmi (7'''). Potom skalárny súčin (55) rozpísaný pomocou súradníc nadobudne tvar

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha_L + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta_L + \frac{-1}{\rho} \cos \gamma_L = K, \quad (56)$$

kde veličina ρ má hodnotu určenú vo vzťahu (20).

Vynásobením rovnice (56) veličinou ρ a jej umocnením na druhú po úprave dostaneme

$$A \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + C \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + D \frac{\partial z}{\partial x} + E \frac{\partial z}{\partial y} + F = 0, \quad (57)$$

kde jednotlivé koeficienty rovnice majú tvar

$$\begin{aligned} A &= \cos^2 \alpha_L - K^2 & D &= -2 \cos \alpha_L \cos \gamma_L \\ 2B &= 2 \cos \alpha_L \cos \beta_L & E &= -2 \cos \beta_L \cos \gamma_L \\ C &= \cos^2 \beta_L - K^2 & F &= \cos^2 \gamma_L - K^2 \end{aligned} \quad (58)$$

Rovnica (57) je rovnicou valcovej plochy kolmej na rovinu (x, y) súr. sústavy $\langle O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ a súčasne určuje priemet izalumklíny do roviny (x, y) , ak parciálne derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ neobsahujú premennú veličinu z .

Z rovnice (1) a (57) dostaneme sústavu rovníc

$$\left. \begin{aligned} z &= z(x, y) \\ A \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + C \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + D \frac{\partial z}{\partial x} + E \frac{\partial z}{\partial y} + F &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (59)$$

ktorej riešením je priesečnica valcovej plochy s fotograf. plochou, udávajúca priebeh nenulovej izalumklíny na topograf. ploche vo zvolenom časovom okamihu a pre zvolenú hodnotu δ_{NL} . Pre konštantu K v koeficientoch (58) rovnice (57) rovnú nule, t. j. pre $K = 0$ je rovnica (57) rovnicou nulovej izalumklíny v rovine (x, y) a sústava rovníc (59) udáva priebeh nulovej izalumklíny na ploche (1).

LITERATÚRA

1. Gassmann F., Guttersohn H., *Kotenstreuung und Relieffaktor*. Geogr. Helv. II, č. 1, Bern 1947. — 2. Krcho J., *K problému zostrojenia máp gradientov spádu, máp izoklín a izalumklín*. Geogr. časopis SAV XVI, č. 1, Bratislava 1964. — 3. Krcho J., *Morfometrická analýza spádových pomerov Košickej kotliny*. Acta geol. et geogr., Geographica, č. 4, Bratislava 1964. — 4. Krcho J., *Oslnenie reliéfu v ľubovoľnom uhle a čase a jeho znázornenie do máp pomocou izalumklín*. Geogr. časopis SAV XVII, č. 1, Bratislava 1965. — 5. Krcho J., *Dĺžka oslnenia reliéfu a jeho znázornenie do mapy pomocou izalumchrón*. Geogr. časopis SAV XVII, č. 3, Bratislava 1965. — 6. Krcho J., *Numerické vyjadrenie bodov na reliéfe tvoriacich izalumklíny pomocou stabelovaných hodnôt sklonu a orientácie reliéfu*. Geogr. časopis SAV XVIII, č. 3, Bratislava 1966. — 7. Šalamon B., *Skalárni pole na geometrických mapách vyšetřované na podklade vlastností jeho interpolační plochy*. Kart. př. VI, č. 1—6, Praha 1951. — 8. Šalamon B., *Některé morfometrické charakteristiky krajinných reliéfů*. Kart. př. VII, č. 1—2, Praha 1953. — 9. Šalamon B., *Das typische Isoliniengrundfeld und seine Anwendung* (1, 2 Teil), Studia geoph. et geod. 7 (1963) 93, Praha 1963. — 10. Šalamon B., *List autorovi zo dňa 17. VI. 1966* — Roudnice n/Labem. Autorov archív.

Recenzoval Š. Bošiak

Jozef Krcho

GENERALIZATION OF ISALUMCLINE EQUATION ON A TOPOGRAPHICAL SURFACE AND ON ITS SCALAR FIELD

Note: The numbers in parentheses within the English text indicate the order of equations in the contribution. The numbers in square brackets indicate the order of the literature cited.

In the present contribution the dynamic problems in relief insolation in any angle and time from the point of view of isalumchrones and isalumclines having been elaborated in connection with isalumclines and slope gradients within the contributions [2, 4, 5, 6] come to the conclusion. In the contributions [2, 4], isalumclines were defined as isolines connecting a set of points insolated under the same angle on a relief as a continuous surface at a given instant of time. The parametric equations of isalumclines were derived. In the contribution [6] the possibility of counting numerical values of relief orientation A_N and relief inclination γ_N in the direction of slope curve for a set of points forming isalumclines at a chosen time instant T and under an exposition (insolation) angle δ_{exp} was shown. In the contribution [5] the problems of isalumchrones defined as isolines connecting a set of points insolated on a relief for the same time divided by hours and days were solved.

Considering that the concrete analytical expression of the equation (1) of the topographical surface by which the relief is replaced is unknown, an auxiliary unit spherical surface was introduced in these accounts. The limited relief part was regarded in the Cartesian coordinate system $\langle O, i, j, \mathbf{k} \rangle$ and in an optional researched point $P(x, y, z)$ on the surface (1) the coordinate system $\langle O, i, j, \mathbf{k} \rangle$ with its origin $O \equiv P(x, y, z)$ was introduced. In the coordinate

system $\langle O, i, j, k \rangle$ at the same time a unit spherical surface with its centre $S \equiv O \equiv P$ was considered. Both the coordinate systems were orientated so that the vector i was directed in the plane (i, j) to south, the vector j to east, and the vector k to zenith. Thus the plane (i, j) could have been identified with the plane of the horizon H . On the unit spherical surface and in the coordinate system $\langle O, i, j, k \rangle$ the unit vector of the normal \mathbf{N} of the relief in the researched point $P(x, y, z)$ and the unit vector \mathbf{L} the carrier of whose is the sunbeam L were considered and thus the vector \mathbf{L} regarding $|\mathbf{L}| = 1$ gave the Sun's position on the unit spherical surface. Regarding that, the Sun's position in the sky is determined by the Cartesian coordinates x_L, y_L, z_L of the vector \mathbf{L} and by the horizontal astronomical coordinates A_\odot, h_\odot , where A_\odot is the Sun's azimuth h_\odot , the altitude of the Sun from the plane of the horizon $H(i, j)$. With regard to $|\mathbf{N}| = 1, |\vec{\mathbf{L}}| = 1$ the coordinates of these vectors are at the same time their directional cosines, too. Afterwards all the relations were derived by means of the coordinates of these vectors or of the vectors derived from them. Therefore the relations were held regarding both the coordinate systems $\langle O', i, j, k \rangle \langle O, i, j, k \rangle$.

All these conditions and relations hold good in the present contribution as well. We shall derive the general equation of the zero isalumcline as a part of light-shadow boundary on the relief according to B. Šalamon [10]. Further we generalize the equation also for non-zero isalumclines so that this one will include all the isalumclines from $\delta_{exp} = 0^\circ$ to $\delta_{exp} = 90^\circ$. The derived relations are to be compared then with the relations on the unit spherical surface.

Regarding to $|\mathbf{N}| = 1, |\mathbf{L}| = 1$ also now for the Cartesian coordinates of these vectors the relations (2) and for the transformation of them to polar coordinates the relations (2') will hold good. The system of altitude lines on the surface (1) is determined by the equation (3), where C is a constant. The isoline system of the scalar surface (1) in the plane (x, y) is determined by the equation (4) and the system of orthogonal trajectories by the equation (5). The value of derivative in the plane (x, y) as the scalar field of the surface (1) in the direction of the normal is determined by the relation (6) which can be specified as the scalar product (6') of two vectors. The first vector is $\text{grad } z$ (7), $|\text{grad } z|$ being determined by the relation (7').

The vector $\text{grad } z$ is orientated to the side, where $\frac{\partial z}{\partial n} > 0$ (Fig. 1). The directional cosines of the $\text{grad } z$ are determined by the relation (7''). The directional cosines of the vector \mathbf{N} regarding the orientation of $\text{grad } z$ are determined by the relation (7'''). The unit vector \mathbf{n} is determined by (8) so that (6') can be written as (9). On the unit spherical surface let us consider the unit vector \mathbf{N}' determined in (10), where the vector $\mathbf{v} = \mathbf{N} \times \mathbf{k}$ and the vector $\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{v}$. The vector \mathbf{N}' will be determined by the coordinates (12'). Further let us take the vector \mathbf{G} so as $|\mathbf{G}| = \text{tg } \gamma_N$, where the angle γ_N is the angle of slope in the direction of the slope curve (5). The vector \mathbf{G} will be obtained on the basis of the relations (13) and the (14) will hold good for that. Its directional cosines are determined by the relation (15). The vector \mathbf{G} is orientated in the plane (x, y) in the direction of the normal to the side of slope (16). Regarding the relations (7'''), (14), (15), (16) the (17) holds good for its orientation (Fig. 2). For the directional cosines of the vector \mathbf{N} on the unit spherical surface regarding the orientation of the vector the relations (18), (18'), (19) hold good. For the zero isalumcline and thus also for the light-shadow boundary on the relief as to the vectors \mathbf{N} and \mathbf{L} the relation (20) holds good, which expressed by means of Cartesian coordinates regarding (7''') gets the form (20'') and after modification (21). The equation (21) is an equation of cylindrical surface perpendicular to the plane (x, y) and at the same time the equation determines the projection of the zero isalumcline onto the plane (x, y) . The solution of the equation system (22) gives the course of isalumclines on the surface (1). The equation (21) can be written as the scalar product (23) for which in the sense of the relation (7) the relation (23') holds good. Thus the relation (23) can be written as (24), in which cosine γ_L is constant for a chosen time instant.

The equation system (22) determines all the zero isalumcline as well as the light-shadow boundary on the relief in the convex part of the relief as a part of the zero isalumcline (Fig. 3).

Let us consider the relations (20) and (20') again. Let us multiply the relation (20') by the member $1/\cos \gamma_N$ so that after a modification the relation (45) will be obtained which can be written as (46), in which the first member is the vector $\mathbf{G} = -\text{grad } z$, the second one the vector \mathbf{l} . Regarding the relations (2') the relation (46) can be expressed as (47) and this one regarding (48) as (49). The quantity $\text{tg } h_{\odot}$ is constant for a chosen time instant and the direction of the vector \mathbf{L}' is constant as well. The relation (49') is the equation of a straight line which in the normal form will be expressed as (50). The variable quantities (x, y) in (50) are the coordinates of the vector $\mathbf{G} = \text{grad } z$ expressed in the relation (44) in the dependence upon the angle ξ . Thus the size of the vector \mathbf{G} at changing its direction within the set of points creating the zero isalumcline changes so that the terminal points create a straight line (Fig. 5). In the Fig. 5 the values I were used for numerical computation. The values I are computed according to the parametric equations in the contribution [4]. To the values I the values II correspond on the Table 3 in the contribution [4].

For the zero isalumcline the relation (55) holds good, K being a constant. The relation (55) expressed by means of Cartesian coordinates regarding the relations (7) will obtain the form (56), the quantity ρ being determined by the relation (20). When the equation (56) is multiplied by the quantity ρ and the (56) squared, after a modification the equation (57) will be obtained, in which the coefficients have the form (58). The equation (57) is the equation of a cylindrical surface perpendicular to the plane (x, y) and at the same time it determines the project of the isalumcline onto the plane (x, y) . The solution of the equation system (59) is the course of the non-zero isalumcline on the topographical surface (1). For the constant K^2 within the coefficients (58) are equal to zero, i. e. $K^2 = 0$ the equation (57) is the equation of the zero isalumcline.

From the Slovak translated by A. K r a j č i r